# 1. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 15.10.12, 12 Uhr

1. Seien $X, Y$ topologische Räume. Wir schreiben $\hom(X, Y)$ für die Menge der Morphismen, d.h. stetigen Abbildungen $X \to Y$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\underline{\hom}(X, Y)(U) := \hom(U, Y)$ eine Garbe von Mengen $\underline{\hom}(X, Y)$ auf $X$ definiert.

   (b) Zeigen Sie die entsprechende Aussage für Morphismen zwischen lokalgeringten Räumen.

   *Hinweis.* Dies bedeutet nichts anderes, als dass man Morphismen von topologischen Räumen bzw. lokalgeringten Räumen verkleben kann.

   *(4 Punkte)*

2. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von Mengen auf einem topologischen Raum $X$. Zeigen Sie:

   (a) Die Halmabbildungen $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sind genau dann injektiv für alle $x \in X$, wenn $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ injektiv ist.

   (b) Es gilt die entsprechende Aussage für „bijektiv“ anstelle von „injektiv“.

   (c) Die entsprechende Aussage für „surjektiv“ gilt *nicht*. Betrachten Sie dazu die Garbe $\mathcal{F} = \underline{\hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C} \smallsetminus \{0\})$ aus Aufgabe 1 und den Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ f \mapsto f^2$.

   *(6 Punkte)*

3. Sei $X$ ein beliebiger topologischer Raum. Setze $C_X := \underline{\hom}(X, \mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(X, C_X)$ ein lokalgeringter Raum ist.

   (b) Konstruieren Sie für eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen Morphismus lokalgeringter Räume $(Y, C_Y) \to (X, C_X)$.

   (c) $\star$ Werden damit alle Morphismen erfasst?

   *(4+2$^\star$ Punkte)*

4. Sei $p$ prim. Beschreiben Sie das Spektrum $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ als topologischen Raum.

   *(2 Punkte)*

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 17.10. besprochen werden? *(2 Punkte)*