Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 15.10.12, 12 Uhr

1. Seien X, Y topologische Räume. Wir schreiben $\hom(X, Y)$ für die Menge der Morphismen, d.h. stetigen Abbildungen $X \to Y$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\underline{\hom}(X, Y)(U) := \hom(U, Y)$ eine Garbe von Mengen $\underline{\hom}(X, Y)$ auf X definiert.

   (b) Zeigen Sie die entsprechende Aussage für Morphismen zwischen lokalgeringten Räumen.

   Hinweis. Dies bedeutet nichts anderes, als dass man Morphismen von topologischen Räumen bzw. lokalgeringten Räumen verkleben kann.

   (4 Punkte)

2. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von Mengen auf einem topologischen Raum X. Zeigen Sie:

   (a) Die Halmabbildungen $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ sind genau dann injektiv für alle $x \in X$, wenn $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ injektiv ist.

   (b) Es gilt die entsprechende Aussage für „bijektiv“ anstelle von „injektiv“.

   (c) Die entsprechende Aussage für „surjektiv“ gilt *nicht*. Betrachten Sie dazu die Garbe $\mathcal{F} = \underline{\hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ aus Aufgabe 1 und den Homomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto f^2$.

   (6 Punkte)

3. Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Setze $C_X := \underline{\hom}(X, \mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie, dass (X, C_X) ein lokalgeringter Raum ist.

   (b) Konstruieren Sie für eine stetige Abbildung $X \to Y$ einen Morphismus lokalgeringter Räume $(Y, C_Y) \to (X, C_X)$.

   (c) $\star$ Werden damit alle Morphismen erfasst?

   (4+2* Punkte)

4. Sei p prim. Beschreiben Sie das Spektrum $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$ als topologischen Raum.

   (2 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 17.10. besprochen werden? *(2 Punkte)*