Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

2. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 22.10.12, 12 Uhr

1. Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein Schema heißt *quasikompakt* (*irreduzibel*, *zusammenhängend*, etc.), wenn der unterliegende topologische Raum diese Eigenschaft besitzt. Zeigen Sie:

   (a) Jedes affine Schema ist quasikompakt.

   (b) Ein Schema ist genau dann quasikompakt, wenn es eine endliche offene Überdeckung durch affine Schemata besitzt.

   (c) $\star$ Geben Sie ein Beispiel für ein Schema an, welches nicht quasikompakt ist. Insbesondere ist es nicht affin. *(4+2* Punkte)*

2. Sei U eine offene Teilmenge eines Schemas X. Zeigen Sie, dass $U := (U, \mathcal{O}_X|_U)$ ebenfalls ein Schema ist. *Hinweis.* Führen Sie die Behauptung auf den Spezialfall $X = \operatorname{Spec}(A)$, $U = D_X(f)$, $f \in A$ zurück. Zeigen Sie $D_X(f) \cong \operatorname{Spec}(A_f)$. *(4 Punkte)*

3. Sei X ein Schema oder allgemeiner ein lokalgeringter Raum. Für $x \in X$ sei $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ der *Restklassenkörper* bei x. Sei K ein Körper. Finden Sie eine Bijektion zwischen $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, X) = \{\text{Morphismen } \operatorname{Spec}(K) \to X\}$ und $\{(x, \alpha) \colon x \in X,\ \alpha \in \operatorname{Hom}(\kappa(x), K)\}$. *(3 Punkte)*

4. Sei X ein topologischer Raum, $Z \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in Z$. Wir nennen x einen *generischen Punkt* von Z, wenn $Z = \overline{\{x\}}$. Zeigen Sie:

   (a) Wenn Z einen generischen Punkt besitzt, dann ist Z irreduzibel.

   (b) Wenn X ein Schema ist, so gilt auch die Umkehrung. Außerdem ist der generische Punkt eindeutig bestimmt und enthalten in jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ mit $U \cap Z \neq \emptyset$.
   Hinweis. Erledigen Sie zunächst den Fall, dass X affin ist.

   (c) Das Spektrum eines Integritätsringes ist irreduzibel; der generische Punkt entspricht dem Nullideal. *(6 Punkte)*

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 24.10. besprochen werden? *(2 Punkte)*