Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 29.10.12, 12 Uhr

1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Was ist das nach Satz 1.2.14 zur affinen Varietät $\mathbb{A}^1(k)$ aus AG1 gehörige k-Schema? Worin bestehen die Unterschiede? Untersuchen Sie dies ebenfalls für die projektive Gerade $\mathbb{P}^1(k)$. *(2 Punkte)*

2. Beschreiben Sie die abgeschlossenen Unterschemata von $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Welche davon sind reduziert, irreduzibel, integer bzw. regulär? *(4 Punkte)*

3. Seien X ein lokalgeringter Raum und A ein Ring. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec}(A)) \to \operatorname{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X)),\ (f, f^\#) \mapsto f^\#_{\operatorname{Spec}(A)}$$
bijektiv ist. *Hinweis.* Für einen Homomorphismus $\varphi : A \to \mathcal{O}_X(X)$ betrachten Sie $f : X \to \operatorname{Spec}(A)$ definiert durch $f(x) = \{a \in A : \varphi(a)_x \in \mathfrak{m}_x\}$. *(4 Punkte)*

4. Sei X ein integres Schema. Wir bezeichnen mit η den generischen Punkt von X und nennen $K := \mathcal{O}_{X,\eta}$ den *Funktionenkörper* von X. Zeigen Sie:
   (a) Ein affines Schema $\operatorname{Spec}(A)$ ist genau dann integer (bzw. reduziert), wenn A ein Integritätsring (bzw. reduziert) ist.
   (b) Es ist K tatsächlich ein Körper, und zwar der Quotientenkörper des Integritätsringes A für jede offene affine Teilmenge $\emptyset \neq \operatorname{Spec}(A) \subseteq X$.
   (c) Für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen ist der Homomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta} = K$ *injektiv.*
   (d) $\star$ Für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$ (Durchschnitt in K).

   (6 + 2* Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 31.10. besprochen werden? *(2 Punkte)*