Algebraische Geometrie 2
WiSe 2012/13

Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

4. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 5.11.12, 12 Uhr

1. Sei R ein Hauptidealring. Geben Sie alle Primideale von $R[X]$ explizit an. Berechnen Sie dazu die Fasern des natürlichen Morphismus $\mathbb{A}^1_R \to \operatorname{Spec}(R)$.

   (4 Punkte)

2. Betrachten Sie den Morphismus $f : \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

   (a) Zeigen Sie, dass f endlich ist.

   (b) Berechnen Sie die Fasern von f. Wieviele Elemente haben die Fasern und wie sehen diese als Primideale konkret aus? Welche Fasern sind reduziert?

   Sie dürfen hierbei ohne Beweis verwenden, dass $X^2 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ für eine Primzahl p genau dann reduzibel ist, wenn $p = 2$ oder $p \equiv 3 \pmod 4$.

   (4 Punkte)

3. Sei $\mathcal{P}$ eine der Eigenschaften endlich / von endlichem Typ / lokal von endlichem Typ. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ stabil unter Komposition und Basiswechsel ist, d.h.:

   (a) Haben zwei Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so auch ihre Komposition $g \circ f : X \to Z$.

   (b) Ist $\pi : S' \to S$ irgendein Morphismus und hat ein Morphismus $f : X \to S$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so auch die Projektion $p_2 : X \times_S S' \to S'$.

   Hinweis. Erledigen Sie zunächst den Fall, dass sämtliche Schemata affin sind.

   (4 Punkte)

4. Der n-dimensionale affine Raum über einem beliebigen Schema S ist definiert durch $\mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} S$.

   (a) Zeigen Sie $\mathbb{A}^n_S \times_S \mathbb{A}^m_S \cong \mathbb{A}^{n+m}_S$.

   (b) Ist die Projektion $p : \mathbb{A}^n_S \to S$ von endlichem Typ oder sogar endlich?

   (c) $\star$ Zeigen Sie: Wenn S ein integres Schema ist, dann ist auch $\mathbb{A}^n_S$ integer.

   ($4+2^\star$ Punkte)

5. $\star$ Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 2$. Der Morphismus von Varietäten $\mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k), (x : y) \mapsto (x^n : y^n)$ induziert einen endlichen Morphismus von Schemata $f : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$. Beschreiben Sie die Fasern von f.

   ($4^\star$ Punkte)

6. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 7.11. besprochen werden? *(2 Punkte)*