Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 12.11.12, 12 Uhr

1. Welche Elemente von $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ sind ganz über $\mathbb{Z}$? *(4 Punkte)*

2. Sei k ein Körper und $n \geq 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_k^n$ eigentlich über k ist.

   (b) Ist auch $\mathbb{A}_k^n$ eigentlich über k?

   Hinweis. Sie können das Bewertungskriterium benutzen. *(4 Punkte)*

3. Sei G ein Gruppenschema über dem Körper k und $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass für jedes k-Schema T die Menge $\hom_k(T, G)$ mit einer natürlichen Gruppenstruktur versehen werden kann. *Bemerkung:* Nur so lässt sich aus einem Gruppenschema eine gewöhnliche Gruppe machen.

   (b) Geben Sie diese Gruppe in den Fällen $G = \mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \mu_n$ explizit an.

   (c) $\star$ Finden Sie ein affines Gruppenschema G über k mit der folgenden Eigenschaft: Für jede k-Algebra A gilt $\hom_k(\operatorname{Spec}(A), G) \cong \mathrm{GL}_n(A)$. *Bemerkung:* Aufgrund dieser Eigenschaft schreibt man auch $G = \mathrm{GL}_n$.

   (4+2* Punkte)

4. Sei G eine gewöhnliche Gruppe. Versehen Sie $(G)_k := \coprod_{g \in G} \operatorname{Spec}(k)$ mit der Struktur eines Gruppenschemas über k. Bestimmen Sie anschließend die Gruppe $\hom_k(T, (G)_k)$, wenn T ein zusammenhängendes k-Schema ist.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 14.11. besprochen werden? *(2 Punkte)*