Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 19.11.12, 12 Uhr

1. Es seien $f, g : X \to Y$ zwei S-Morphismen, wobei Y separiert über S sei. Es gebe eine offene dichte Teilmenge $U \subseteq X$ mit $f|_U = g|_U$. Zeigen Sie:

   (a) Die unterliegenden stetigen Abbildungen von f und g stimmen überein.

   (b) Wenn X zusätzlich reduziert ist, dann gilt sogar $f = g$.

   (c) $\star$ Auf die Separiertheit von Y über S kann nicht verzichtet werden.

   (4+2* Punkte)

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Bewertungskriteriums, dass eigentliche Morphismen von noetherschen Schemata stabil unter Komposition und Basiswechsel sind. Folgern Sie, dass projektive Schemata eigentlich sind.

   (4 Punkte)

3. Es sei $K \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von endlich-erzeugten Körpererweiterungen. Zeigen Sie
$$\mathrm{trdeg}_K(M) = \mathrm{trdeg}_K(L) + \mathrm{trdeg}_L(M).$$

   (4 Punkte)

4. Seien $d \in \mathbb{N}$ und k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $d \in k^*$. Betrachten Sie das k-Schema $X := \mathrm{Spec}(k[x, y]/(x^d + y^d - 1))$.

   (a) Zeigen Sie, dass X eine reguläre Kurve ist (die sogenannte *Fermat-Kurve*). *Hinweis.* Für die Regularität können Sie wie in AG1 die Jakobi-Matrix benutzen; das liegt an Korollar 1.6.14, sowie Satz 4.1.8 aus AG1.

   (b) Seien $a, b \in k$ mit $a^d + b^d = 1$. Dann ist $P = (x - a, y - b) \in X$ ein regulärer Punkt und daher der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ ein diskreter Bewertungsring. Geben Sie einen Erzeuger des maximalen Ideals explizit an. *Tipp.* Schreiben Sie $0 = ((x - a) + a)^d + ((y - b) + b)^d - 1$ als Linearkombination von $x - a$ und $y - b$.

   (c) Geben Sie eine Transzendenzbasis von $k(X)/k$ explizit an.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 21.11. besprochen werden? *(2 Punkte)*