Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 26.11.12, 12 Uhr

1. Es seien X, Y integre Schemata mit generischen Punkten η_X bzw. η_Y. Wir nennen einen Morphismus $f : X \to Y$ *dominant*, wenn das Bild $f(X) \subseteq Y$ dicht ist. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (a) Es ist f dominant.
   (b) Für offene Teilmengen $V \subseteq Y$, $\emptyset \neq U \subseteq f^{-1}(V)$ ist $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ injektiv.
   (c) Es gilt $f(\eta_X) = \eta_Y$.
   (d) Es gilt $\eta_Y \in f(X)$. *(4 Punkte)*

   In den nächsten Aufgaben sei k ein Körper.

2. Sei $A = k[x, y]/(y^2 - x^3)$ und $X = \mathrm{Spec}(A)$ die Neilsche Parabel. Sie wissen aus AG1 bereits $A = k[t^2, t^3] \subseteq k[t]$ mit $t = \frac{y}{x}$. Bestimmen Sie
   (a) die Normalisierung $\pi : \tilde{X} \to X$;
   (b) die Faser von π über dem singulären Punkt $(x, y) \in X$.
   (c) $\star$ Veranschaulichen Sie (a) und (b) anhand eines Bildes.

   (4+1* Punkte)

3. Finden Sie für jedes $d \in \mathbb{N}$ einen Morphismus $\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ vom Grad d.

   (4 Punkte)

4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik ungleich $2, 3$ und sei $K := k(x)[y]/(y^2 - x^3 - x)$.
   (a) Zeigen Sie, dass K/k eine endlich-erzeugte Körpererweiterung mit Transzendenzgrad 1 ist.
   (b) Finden Sie die zugehörige normale eigentliche Kurve C/k mit $k(C) = K$. *Hinweis.* Zeigen Sie die Normalität mithilfe der Jacobi-Matrix (AG1, Def. 4.1.1) auf beiden affinen Karten.
   (c) Beschreiben Sie den Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_k$ auf den abgeschlossenen Punkten, der zur Inklusion $k(x) \hookrightarrow K$ gehört.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 28.11. besprochen werden? *(2 Punkte)*