Prof. Dr. Urs Hartl
Martin Brandenburg

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 10.12.12, 12 Uhr

1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$. Betrachten Sie die Kurve $C = V_{\mathbb{P}^2}(Y^2Z - X^3 - X^2Z - Z^3)$ aus Beispiel 1.7.13 mit $k(C) = k(y)[x]/(x^3 + x^2 + 1 - y^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}(y)$.

   (4 Punkte)

2. Sei C eine normale eigentliche Kurve über k.
   (a) Konstruieren Sie einen Homomorphismus $\deg : \mathrm{Cl}(C) \to \mathbb{Z}$ von abelschen Gruppen mit $\mathrm{Cl}^0(C)$ als Kern.
   (b) Zeigen Sie, dass $\deg : \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{Z}$ sogar ein Isomorphismus ist.
   (c) Zeigen Sie, wenn k algebraisch abgeschlossen ist, so ist $\deg : \mathrm{Cl}(C) \to \mathbb{Z}$ surjektiv. *(4 Punkte)*

3. Zeigen Sie die Umkehrung von Aufgabe 2: Ist k algebraisch abgeschlossen und C eine normale eigentliche Kurve über k derart, dass $\deg : \mathrm{Cl}(C) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, dann ist bereits $C \cong \mathbb{P}^1$.

   Tipp. Für zwei abgeschlossene Punkte $P, Q \in C$ gibt es ein $\varphi \in k(C)$ mit $(P) - (Q) = \operatorname{div}(\varphi)$.

   (4 Punkte)

4. Für eine A-Algebra B kann man analog zu Definition 1.8.8. den B-Modul $\Omega_{B/A}$ definieren durch Erzeuger $d(b)$ für $b \in B$ und Relationen $d(a) = 0$ für $a \in A$ und $d(b + b') = d(b) + d(b')$, $d(b \cdot b') = b \cdot d(b') + b' \cdot d(b)$ für $b, b' \in B$.

   Zeigen Sie: Für $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ ist $\Omega_{B/A}$ ein freier B-Modul vom Rang n. Geben Sie eine Basis explizit an.

   Hinweis. Die entsprechende geometrische Aussage lautet, dass das Tangentialbündel des Schemas $\mathbb{A}^n$ trivial ist. Genau wie bei der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$.

   (4 Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 12.12. besprochen werden? *(2 Punkte)*