Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 17.12.12, 12 Uhr

1. Es sei C eine normale eigentliche Kurve über k und $D \in \mathrm{Div}(C)$. Für $U = \emptyset$ sei $\mathcal{O}_C(D)(U) = \{0\}$ und für $\emptyset \neq U \subseteq C$ offen sei

$$\mathcal{O}_C(D)(U) := \{f \in k(C)^* : \forall P \in U \text{ gilt } \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_P(D) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_C(D)$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf C ist mit $\mathcal{O}_C(D)(C) = \mathcal{L}(D)$.

   (b) Tatsächlich ist $\mathcal{O}_C(D)$ ein $\mathcal{O}_C$-Modul, d.h. für alle $U \subseteq C$ offen ist $\mathcal{O}_C(D)(U)$ ein $\mathcal{O}_C(U)$-Modul und die Restriktionen sind linear.

(4 Punkte)

2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $d \in \mathbb{N}$ mit $d \in k^*$. Finden Sie einen kanonischen Divisor auf der Fermat-Kurve $V_{\mathbb{P}^2}(x^d + y^d - z^d)$.

(4 Punkte)

3. Zeigen Sie den Satz von Riemann-Roch für $\mathbb{P}^1_k$ auf direkte Weise: Für alle $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1_k)$ gilt $\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) + 1 - g$, wobei $g = 0$ und $K = -2(1:0)$ der kanonische Divisor ist.

   Hinweis. Für $D = \sum_i m_i \cdot (P_i)$ mit $P_i = (f_i) \in \operatorname{Spec} k[t] = \mathbb{P}^1_k \setminus \{(1:0)\}$ ist die Multiplikation mit $\prod_i f_i^{m_i}$ ein k-linearer Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}(D)$ und $\{f \in k[t] : \deg(f) \leq \deg(D)\}$

(4 Punkte)

4. $\star$ Es sei C eine normale eigentliche Kurve über $k = k^{\mathrm{alg}}$ vom Geschlecht 0. Zeigen Sie $C \cong \mathbb{P}^1_k$. Kennen Sie eine analoge Aussage über 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten?