Algebraische Geometrie 2 | Prof. Dr. Urs Hartl
WiSe 2012/13 | Martin Brandenburg

11. Übungsblatt

Abgabetermin: Mo, 7.1.13, 12 Uhr

1. Sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Seien $e_1, e_2, e_3 \in k$ paarweise verschieden. Die projektive Kurve $V_{\mathbb{P}^2}(Y^2Z-(X-e_1Z)(X-e_2Z)(X-e_3Z))$ ist normal (das brauchen Sie nicht zu beweisen). Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Hauptdivisoren $\operatorname{div}\left(\frac{X}{Z} - e_i\right)$ und $\operatorname{div}\left(\frac{Y}{Z}\right)$, sowie die Divisoren $\operatorname{div}\left(d\frac{X}{Z}\right)$ und $\operatorname{div}\left(\frac{Z}{Y}\, d\frac{X}{Z}\right)$.

   (4 Punkte)

2. Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2_k$ eine Kurve in Weierstraß-Normalform über einem perfekten Körper k der Charakteristik 2. Zeigen Sie, dass die Diskriminante Δ genau dann verschwindet, wenn C singulär ist. In diesem Fall gibt es genau einen singulären Punkt, und dieser liegt in $C(k)$. *Hinweis.* Im Fall $a_1 \neq 0$ kann man durch einen geeigneten Koordinatenwechsel ohne Einschränkung $a_3 = a_4 = 0$ annehmen.

   (4 Punkte)

3. Sei C eine normale eigentliche Kurve über k vom Geschlecht $g = 2$. Zeigen Sie, dass es einen surjektiven separablen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1_k$ vom Grad 2 gibt. Folgern Sie, dass $k(C)/k(t)$ eine Galoiserweiterung vom Grad 2 ist. *Hinweis.* Zeigen Sie zunächst, dass es einen Divisor $D \geq 0$ gibt mit $\deg(D) = \ell(D) = 2$.

   (4 Punkte)

4. $\star$ Das *Geschlecht* einer endlich-erzeugten Körpererweiterung K von k vom Transzendenzgrad 1 mit $\{f \in K : f \text{ ist algebraisch über } k\} = k$ ist definiert als das Geschlecht der eigentlichen normalen Kurve C/k mit $k(C) = K$. Es sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Finden Sie das Geschlecht von $k(x)[y]/(y^2 + x^4 - 1)$.

   ($4^\star$ Punkte)

5. Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der Übung am 9.1. besprochen werden? *(2 Punkte)*