Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Mathematisches Institut

Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation

Diplomarbeit

vorgelegt von:

Anne Schindler

Betreuer: Prof. Dr. Urs Hartl

Münster, 22.Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Arithmetik von Zahlkörpern sind abelsche Varietäten die höher-dimensionale Verallgemeinerung von elliptischen Kurven. In der Arithmetik von Funktionenkörpern führte Drinfeld [Dri76, Dri77] Drinfeld-Moduln als analoges Konzept zu elliptischen Kurven ein. Vielversprechende Verallgemeinerungen der Drinfeld-Moduln in höheren Dimensionen sind Anderson A-Motive beziehungsweise abelsche Anderson A-Moduln; ihre Theorie weist viele Parallelen zur Theorie der abelschen Varietäten auf.
Eine spezielle Klasse von abelschen Varietäten sind solche mit komplexer Multiplikation, denn diese haben den größtmöglichen Endomorphismenring. Elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation wurden schon Anfang des 20. Jahrhunderts untersucht, aber erst in den 1950er Jahren konnte die Theorie der komplexen Multiplikation erfolgreich auf abelsche Varietäten erweitert werden.

Man konnte schon früh zeigen [Deu41], dass jede elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation über einer endlichen Erweiterung des Primkörpers definiert werden kann. In Charakteristik Null ist dieses Resultat auch für höher-dimensionale abelsche Varietäten bewiesen (z.B: [ST61]). Für Charakteristik $p \neq 0$ existiert jedoch ein Gegenbeispiel von Tate [Tat66], so dass man die Voraussetzung folgendermaßen einschränken muss:
Jede abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation ist isogen zu einer abelschen Varietät, die sich über einem endlichen Körper definieren lässt (Grothendieck, Oort [Oor73]). Außerdem gilt, dass jede abelsche Varietät über einem endlichen Körper komplexe Multiplikation hat. Daraus ergibt sich die folgende Äquivalenz: Jede abelsche Varietät in Charakteristik $p \neq 0$ hat komplexe Multiplikation genau dann, wenn sie isogen zu einer abelschen Varietät ist, die über einem endlich Körper definiert ist. Nun hat Ch.-F. Yu folgende Verallgemeinerung des Theorems von Grothendieck bewiesen [Yu04]:
Jede abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_L$ in Charakteristik p, lässt sich über einem endlichen Körper definieren, hier ist $\mathcal{O}_L$ der Ganzheitsring des CM-Körpers L.

In dieser Arbeit werden wir das Theorem von Ch.-F. Yu auf Seiten der Anderson A-Motive formulieren und beweisen und die dazu nötigen Voraussetzungen näher untersuchen. Außerdem werden wir analog zu dem CM-Typ (vgl. [Mil07]) für abelsche Varietäten, einen CM-Typ für abelsche Anderson A-Moduln definieren und die Anderson A-Motive bezüglich dieses CM-Typs klassifizieren.

Um ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation zu definieren, benötigen wir eine projektive, geometrisch irreduzible und normale Kurve C über $\mathbb{F}_q$ und einen festen $\mathbb{F}_q$-wertigen Punkt $\infty \in C(\mathbb{F}_q)$. Wir setzen den Ring $A := \Gamma(C \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_C)$. Sei L eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$ und $\gamma : A \to L$ ein $\mathbb{F}_q$-Homomorphismus. Der Endomorphismus $\sigma : A \otimes_{\mathbb{F}_q} L \to A \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ sei gegeben durch $a \otimes b \mapsto a \otimes b^q$ für $a \in A$ und $b \in L$, sei $L\{\tau\}$ der nicht-kommutative Polynomring $L\{\tau\}$ mit σ-linearem τ und das Ideal $J \subset A_L := A \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ sei erzeugt von $a \otimes 1 - 1 \otimes \gamma(a)$ für $a \in A$.
Ein *Anderson A-Motiv* $\underline{M} := (M, \tau_M)$ von Rang r und Dimension d über L besteht aus einem lokal freien A_L-Modul M von Rang r, welcher endlich erzeugt ist über $L\{\tau\}$ und einem injektiven A_L-Homomorphismus $\tau_M : \sigma^* M \to M$ mit $\dim_L \operatorname{coker} \tau_M = d$ und $J^d \cdot \operatorname{coker} \tau_M = 0$.
Sei außerdem Q der Quotientenkörper von A. Falls die Endomorphismen Q-Algebra des Anderson A-Motivs $\operatorname{QEnd}(\underline{M}) := \operatorname{End}_L(\underline{M}) \otimes_A Q$ eine kommutative Q-Algebra der Dimension $r = \operatorname{rk} \underline{M}$ enthält, so sagen wir, dass $\underline{M}$ *komplexe Multiplikation* hat.

Um nun mit Anderson A-Motiven arbeiten zu können, betrachten wir im zweiten Kapitel die $\mathbb{F}_q$-Algebra A und führen Anderson A-Motive sowie ihre Morphismen und Isogenien ein. Darüber hinaus definieren wir abelsche Anderson A-Moduln und geben einen kontravarianten Funktor zwischen der Kategorie der abelschen Anderson A-Moduln und der Kategorie der Anderson A-Motive an. Weiter zeigen wir, dass jedes Anderson A-Motiv über L schon über einem endlich erzeugten Unterkörper von L definiert ist.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit komplexer Multiplikation. Zunächst definieren wir komplexe Multiplikation durch eine Q-Algebra E und untersuchen im Anschluss halbeinfache CM-Algebren. Wir zeigen, dass wir zu jedem CM-Anderson A-Motiv ein isogenes Anderson A-Motiv finden, für das der Ganzheitsring $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ eine Teilmenge des Endomorphismenrings $\operatorname{End}_L(\underline{M})$ ist. Zudem konstruieren wir aus einem halbeinfachen CM-Anderson A-Motiv eine invertierbare Garbe über der zu E gehörenden projektiven Kurve.

Im vierten Kapitel zeigen wir, dass Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E schon selbst halbeinfach sind, das heißt, dass diese keine echten Faktormotive besitzen. Wir zeigen, dass sich dieses Ergebnis nicht auf einfache Anderson A-Motive übertragen lässt.
Außerdem betrachten wir im vierten Kapitel reine, sowie uniformisierbare Anderson A-Motive. Ein Anderson A-Motiv heißt rein, wenn es sich zu einer Garbe auf $C_L := C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} L$ erweitern lässt, so dass τ_M einen Isomorphismus der Halme bei ∞ induziert. Uniformisierbare abelsche Anderson A-Moduln sind solche, deren Exponentialfunktion surjektiv ist. Wir zeigen, dass sowohl Uniformisierbarkeit als auch Reinheit nicht aus komplexer Multiplikation folgen.

In Kapitel 5 definieren wir den CM-Typ eines Anderson A-Motivs über $\mathbb{C}_\infty$ und klassifizieren die Anderson A-Motive, soweit dies möglich ist, bis auf Isogenie beziehungsweise bis auf Isomorphie. Dazu betrachten wir die Injektion zwischen der Menge der Isogenieklassen (beziehungsweise Isomorphieklassen) der Anderson A-Motive in die Menge der Isomorphieklassen der CM-Typen (und Gitter). Um die Wohldefiniertheit dieser Injektion zu zeigen, leiten wir in Abschnitt 5.4 einen algebraischen Morphismus her. Die vollständige Klassifikation der Anderson A-Motive scheitert allerdings daran, dass wir nicht zu jedem CM-Typ ein Anderson A-Motiv finden können, da nicht jeder Quotient aus $\mathbb{C}_\infty$ modulo eines Gitters die Struktur eines Anderson A-Motivs besitzt.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit zeigen wir in Satz 6.3.6, der besagt, dass sich halbeinfache Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation bis auf Isogenie über einer endlich Körpererweiterung von Q beziehungsweise $\mathbb{F}_q / \ker(\gamma)$ definieren lassen. Um dies zu zeigen, konstruieren wir einen Modulraum für oben genannte Anderson A-Motive und zeigen, dass dieser endlich ist.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Urs Hartl für die sehr gute Betreuung bedanken.

1.1 Notationen

In dieser Arbeit werden wir einige Notationen häufig verwenden.
Wir bezeichnen mit

$\mathbb{F}_q$	einen endlichen Körper der Charakteristik p mit $q = p^r$ Elementen.
C	eine projektive, geometrisch irreduzible und normale Kurve über $\mathbb{F}_q$.
$\infty \in C(\mathbb{F}_q)$	einen festen $\mathbb{F}_q$-wertigen Punkt auf C.
A	die $\mathbb{F}_q$-Algebra $\mathcal{O}_C\,(C \setminus \{\infty\})$.
Q	$:= \mathrm{Quot}(A) = \mathbb{F}_q(C)$ den Funktionenkörper von C.
$C \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec} A$	die affine Kurve $C \setminus \{\infty\}$.
A_R	$:= A \otimes_{\mathbb{F}_q} R$ für einen Ring R.
Q_∞	die Vervollständigung von Q in ∞.
$\mathbb{C}_\infty$	die Vervollständigung des algebraischen Abschluss von Q_∞.

L	eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$.
$\gamma : A \to L$	einen fixierten $\mathbb{F}_q$-Homomorphismus.
ε	$:= \ker \gamma$ die A-Charakteristik von L.
J	das Ideal $\big(a \otimes 1 - 1 \otimes \gamma(a) \bigm\vert a \in A\big)$ in $A_L := A \otimes_{\mathbb{F}_q} L$.
$\sigma : A_R \to A_R$,	den durch $a \otimes r \mapsto a \otimes r^q$ für $a \in A$ und $r \in R$ gegebenen Endomorphismus.
$\sigma^* M$	$:= M \otimes_{A_L,\sigma} A_L$ für einen A_L-Modul M.
$\tau : M \to M$	die zu einem τ-Modul M gehörige σ-lineare Abbildung.
$\tau_M : \sigma^* M \to M$	die Linearisierung von τ.
$L\{\tau\}$	den nicht-kommutativen Polynomring.
$\mathrm{QEnd}(\underline{M})$	$:= \mathrm{End}(\underline{M}) \otimes_A Q$ den Quasiendomorphismenring von $\underline{M}$.

$v \in C$	einen abgeschlossenen Punkt der Kurve C.
$\mathcal{O}_{C,v}$	den lokalen Ring bei v.
$\mathbb{F}_v$	$:= \mathcal{O}_{C,v}/\mathfrak{m}_v$ den Restklassenkörper bei v.
A_v	$:= \widehat{\mathcal{O}_{C,v}}$ die Komplettierung von $\mathcal{O}_{C,v}$ bezüglich v.
Q_v	$:= \mathrm{Quot}(A_v)$ den Quotientenkörper von A_v.
$A_{v,L}$	$:= A_v \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} L$ für eine Körpererweiterung L über $\mathbb{F}_q$.
$Q_{v,L}$	$:= A_{v,L}[\frac{1}{z_v}]$

$\mathbb{F}$	$:= \mathbb{F}_q^{alg}$ einen algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_q$.
S	ein $\mathbb{F}_q$-Schema.

2 Anderson A-Motive

In diesem Kapitel geben wir die benötigten Strukturen an, um mit Anderson A-Motiven arbeiten zu können. Wir führen die Kategorie der abelschen Anderson A-Moduln ein und geben den Funktor zwischen der Kategorie der abelschen Anderson A-Moduln und der Kategorie der Anderson A-Motiven an. Von diesem wissen wir, dass er über einem perfekten Körper volltreu und essentiell surjektiv ist. Die Kategorien sind also anti-äquivalent.
Zunächst beginnen wir jedoch mit einigen Definitionen und Eigenschaften, die wir benötigen, um Anderson A-Motiv einführen zu können.

2.1 Eigenschaften der $\mathbb{F}_q$-Algebra A

In der gesamten Arbeit sei C eine projektive, geometrisch irreduzible und normale Kurve über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ der Charakteristik p. Wir fixieren einen $\mathbb{F}_q$-wertigen Punkt $\infty \in C(\mathbb{F}_q)$. Davon ausgehend definieren wir die $\mathbb{F}_q$-Algebra $A := \mathcal{O}_C\left(C \setminus \{\infty\}\right)$ als den Ring der regulären Funktionen außerhalb von ∞. Den Quotientenkörper von A bezeichnen wir mit Q.

Anderson A-Motive sowie abelsche Anderson A-Moduln werden immer in Abhängigkeit von der $\mathbb{F}_q$-Algebra A definiert. Dazu benötigen wir den Begriff eines A-Körpers.

Definition 2.1.1 (A-Körper) Sei L eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$ und $\gamma : A \to L$ ein fester $\mathbb{F}_q$-Homomorphismus. Dann heißt das Paar (L, γ) ein *A-Körper*.
Der Kern von γ heißt *A-Charakteristik* von L. Gilt $\varepsilon := \ker(\gamma) = (0)$, so hat L *generische Charakteristik*. Andernfalls ist ε ein maximales Ideal von A und L hat *endliche Charakteristik*.

Die $\mathbb{F}_q$-Algebra A ist ein Dedekindring. Das bedeutet insbesondere, dass A noethersch ist und dass jedes Ideal eine eindeutige Zerlegung in Potenzen von Primidealfaktoren besitzt.

Lemma 2.1.2 Die $\mathbb{F}_q$-Algebra $A = \mathcal{O}_C(C \setminus \{\infty\})$ ist ein normaler, noetherscher Integritätsring. Insbesondere ist A ein Dedekindring.

Beweis: Nach Voraussetzung ist C eine geometrisch irreduzible und reduzierte, projektive Kurve über $\mathbb{F}_q$. Damit ist $\mathcal{O}_C(\mathcal{U})$ ein Integritätsring für alle offenen Teilmengen $\mathcal{U} \subseteq C$. Insbesondere ist $C \setminus \{\infty\}$ offen in C und damit $\mathcal{O}_C(C \setminus \{\infty\})$ ein Integritätsring. Als Kurve ist $C \setminus \{\infty\}$ von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$. Damit ist A als $\mathbb{F}_q$-Algebra von endlichem Typ noethersch. Außerdem ist A normal, da $\operatorname{Spec} A$ eine reguläre Kurve ist.
Außerdem gilt $\dim A = \dim \operatorname{Spec} A = \dim C \setminus \{\infty\} = 1$.
Damit ist A ein Dedekindring, also ein noetherscher, normaler Integritätsring der Dimension 1. $\square$

Um ein Anderson A-Motiv definieren zu können, benötigen wir noch weitere Definitionen. Dazu dient der kommende Abschnitt.

2.2 Linearisierung von τ

Wir wissen, dass ein Anderson A-Motiv aus einem Modul zusammen mit einem Morphismus besteht, die wir noch näher bestimmen werden. Ein allgemeineres Konzept als Anderson A-Motive sind τ-Moduln, die wir hier einführen, um später auf sie zurück greifen zu können.
Sei dazu $A_R := A \otimes_{\mathbb{F}_q} R$ mit einem Ring R, sei M ein A_R-Modul und σ der Endomorphismus auf A_R, der $a \otimes b$ auf $a \otimes b^q$ für $a \in A$ und $b \in R$ schickt.
Sei

$$\begin{aligned} \tau : M &\to M, \\ m &\mapsto \tau(m) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

ein σ-linearer Morphismus, dass heißt $\tau(am) = \sigma(a)\tau(m)$ für $a \in A_R$ und $m \in M$.
Wir können τ auch linearisieren.

Lemma 2.2.1 Die σ-lineare Abbildung τ aus (2.2.1) induziert einen A_R-Modulhomomorphismus τ_M mit $\tau = \tau_M \circ i$, für $i : M \to M \otimes_{A_R,\sigma} A_R$ mit $m \mapsto m \otimes 1$. Insbesondere ist τ_M genau dann injektiv, wenn τ injektiv ist.

Beweis: Setze $\sigma^* M := M \otimes_{A_R,\sigma} A_R$ mit $am \otimes 1 = m \otimes \sigma(a)$ für $m \in M$ und $a \in A_R$. Durch $b \cdot (m \otimes c) := m \otimes bc$, für $b, c \in A_R$ und $m \in M$, wird $\sigma^* M$ ein A_R-Modul.
Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_M : \sigma^* M &\to M, \\ m \otimes b &\mapsto b \cdot \tau(m). \end{aligned}$$

Dann ist τ_M linear nach Definition und wohldefiniert, denn

$$\tau_M(am \otimes 1) = 1 \cdot \tau(am) = \sigma(a) \cdot \tau(m) = \tau_M\left(m \otimes \sigma(a)\right).$$

Nach Definition gilt $\tau = \tau_M \circ i$ und da i injektiv ist folgt die Behauptung. □

Nun können wir einen τ-Modul definieren.

Definition 2.2.2 (τ-Modul) Ein Paar $\underline{M} := (M, \tau_M)$ heißt *τ-Modul* von Rang $r \geq 1$ über $\operatorname{Spec} A_R$, wenn M ein lokal freier A_R-Modul von endlichem Rang r ist und $\tau_M : \sigma^* M \to M$ ein injektiver A_R-Modulhomomorphismus ist.

Nach vorangegangenem Lemma 2.2.1 ist der τ-Modul auch durch die Angabe der σ-linearen Abbildung wohldefiniert.
Fassen wir τ als Variable auf, so können wir den nicht-kommutativen Polynomring über L definieren.

Definition 2.2.3 ($L\{\tau\}$) Sei L eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$. Wir definieren

$$L\{\tau\} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} b_i \tau^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, b_i \in L \right\}$$

als den *nicht-kommutativen Polynomring* in τ, das heißt in $L\{\tau\}$ gilt $\tau b = b^q \tau$ für $b \in L$.

Jeder τ-Modul $\underline{M}$ über $\operatorname{Spec} A_L$ mit einem σ-linearen Morphimus τ ist durch $(\sum_i b_i \tau^i, m) \mapsto \sum_i b_i \tau^i(m)$ ein $L\{\tau\}$-Modul, dabei wird die Variable τ aus $L\{\tau\}$ auf die Abbildung τ des τ-Moduls abgebildet.

2.3 Definition eines Anderson A-Motivs

Mit Hilfe der vorangegangenen Definitionen können wir jetzt Anderson A-Motive über einem A-Körper L definieren. Die Definitionen und Sätze dieses Abschnitts stammen, soweit nicht anders angegeben, aus der Vorlesung [Har08, Kapitel 2].

Definition 2.3.1 (Anderson A-Motiv) Sei (L, γ) ein A-Körper und $J \subset A_L$ das durch $a \otimes 1 - 1 \otimes \gamma(a)$ für alle $a \in A$ erzeugte Ideal und seien r und d nicht negative ganze Zahlen.
Ein *Anderson A-Motiv* $\underline{M} = (M, \tau_M)$ von Rang r und Dimension d über L besteht aus einem lokal freien A_L-Modul M von Rang r und einem injektiven A_L-Modulhomomorphismus $\tau_M : \sigma^* M \to M$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) M ist als $L\{\tau\}$-Modul endlich erzeugt mit σ-linearem τ,

(ii) der Kokern von τ_M ist ein L-Vektorraum der Dimension d

(iii) und der Kokern von τ_M wird durch J^d annuliert, das heißt $(a \otimes 1 - 1 \otimes \gamma(a))^d = 0$ auf $\operatorname{coker} \tau_M = M / \operatorname{im}(\tau_M)$.

Wir bezeichnen den Rang eines Anderson A-Motivs $\underline{M}$ mit $\operatorname{rk}(\underline{M}) := \operatorname{rk}_{A_L}(M)$ und seine Dimension mit $\dim(\underline{M}) := \dim_L(\operatorname{coker} \tau_M)$.

Bemerkung 2.3.2 Ein Anderson A-Motiv über einem Körper L von Rang r ist insbesondere ein τ-Modul von Rang r über $\operatorname{Spec} A_L$.

Wir geben nun ein Beispiel für Anderson A-Motive von Rang und Dimension 2 an.

Beispiel 2.3.3 Sei $A := \mathbb{F}_q[t]$ und $\gamma : A \to L$ gegeben durch $\gamma(t) = \theta$ die Abbildung, die L zu einem A-Körper macht. Damit ist A_L der Polynomring $L[t]$.
Ein Tupel $\left(M = L[t]^{\oplus 2}, \tau_M = \Delta_0 + \Delta_1 t\right)$ für $\Delta_0, \Delta_1 \in M_{2x2}(L)$ ist genau dann ein Anderson A-Motiv von Rang und Dimension 2, wenn die Determinante $\det(\Delta_0 + \Delta_1 t)$ die Form $c(t-\theta)^2$ hat für ein $c \in L^x$.

Im Folgenden betrachten wir die Homomorphismen von Anderson A-Motiven.

Definition 2.3.4 (Morphismus) Seien $\underline{M}$ und $\underline{N}$ Anderson A-Motive über L. Ein A_L-Homomorphismus $f : M \to N$ heißt ein *Morphismus von Anderson A-Motiven*, falls das

Diagramm

$$\begin{tikzcd} \sigma^* M \arrow[r, "\sigma^* f"] \arrow[d, "\tau_M"] & \sigma^* N \arrow[d, "\tau_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\sigma^* f := f \otimes \mathrm{id}$ durch $(m \otimes a) \mapsto (f(m) \otimes a)$ definiert ist.
Die Menge dieser Morphismen bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_L(\underline{M}, \underline{N})$ und wir setzen wie gewohnt $\mathrm{End}_L(\underline{M}) := \mathrm{Hom}_L(\underline{M}, \underline{M})$.
Wir bezeichnen die Endomorphismen Q-Algebra des Anderson A-Motivs $\underline{M}$ mit $\mathrm{QEnd}(\underline{M}) := \mathrm{End}_L(\underline{M}) \otimes_A Q$.

Wir wissen, dass die Homomorphismen eines Anderson A-Motivs einen endlich erzeugten, lokal freien A-Modul bilden.

Theorem 2.3.5 [BH08, Thm 9.5]Die Menge der Morphismen von Anderson A-Motiven $\mathrm{Hom}_L(\underline{M}, \underline{N})$ bildet einen lokal freien A-Modul von endlichem Rang. Insbesondere ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_L(\underline{M})$ eine A-Algebra von endlicher Dimension kleiner gleich $\mathrm{rk}(\underline{M})^2$.

Mit Hilfe der Morphismen von Anderson A-Motiven können wir nun Faktormotive sowie Isogenien zwischen Anderson A-Motiven definieren.

Definition 2.3.6 (Faktormotiv) [BH08, Def 1.5] Seien $\underline{N}$ und $\underline{M}$ Anderson A-Motive über L, dann heißt $\underline{N}$ ein *Faktormotiv* von $\underline{M}$, falls ein surjektiver Morphismus $f : \underline{M} \to \underline{N}$ existiert.

Definition 2.3.7 (Isogenie) Seien $\underline{N}$ und $\underline{M}$ zwei Anderson A-Motive über L. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_L(\underline{N}, \underline{M})$ heißt *Isogenie*, falls f als A_L-Homomorphismus injektiv ist und der Kokern von f ein endlich dimensionaler L-Vektorraum ist. Falls solch eine Isogenie existiert, so heißen (N, τ_N) und (M, τ_M) *isogen*.
Eine Isogenie heißt *separabel*, falls $\tau_{\mathrm{coker}\, f} : \sigma^* \mathrm{coker}\, f \to \mathrm{coker}\, f$ ein Isomorphismus ist. Dabei ist $\tau_{\mathrm{coker}\, f}$ durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & \mathrm{coker}\, f \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \sigma^* N \arrow[r, "\sigma^* f"] \arrow[u, "\tau_N"] & \sigma^* M \arrow[r] \arrow[u, "\tau_M"] & \mathrm{coker}\, \sigma^* f := (\mathrm{coker}\, f) \otimes_{A_L, \sigma^*} A_L \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\tau_{\mathrm{coker}\, f}"] & 0 \end{tikzcd}$$

definiert.

Wie auf Seiten der abelschen Varietäten, existiert auch auf Seiten der Anderson A-Motive eine Art dualer Isogenie. Diese duale Isogenie ist jedoch nicht eindeutig.

Satz 2.3.8 [BH08, Cor 5.4] Sei $f : \underline{M} \to \underline{N}$ eine Isogenie von Anderson A-Motiven $\underline{M}$ und $\underline{N}$ über L. Dann existiert ein $a \in A,\ a \neq 0$ und eine Isogenie $\hat{f} : \underline{N} \to \underline{M}$ derart, dass $f \circ \hat{f} = a \cdot \mathrm{id}_N$ und $\hat{f} \circ f = a \cdot \mathrm{id}_M$.
Wir nennen $\hat{f}$ eine *duale Isogenie* von f.

Mit Hilfe der dualen Isogenie erhalten wir einen Isomorphismus der Quasi-Endomorphismenringe.

Satz 2.3.9 In der Situation von Satz 2.3.8 existiert ein Q-Algebren-Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{QEnd}(\underline{M}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{QEnd}(\underline{N}), \\ g &\mapsto \frac{1}{a} \cdot f \circ g \circ \hat{f}. \end{aligned}$$

Dieser Q-Algebren-Isomorphismen wird vor allen Dingen für den CM-Typ in Kapitel 5 eine Rolle spielen.

2.4 Anderson A-Motive über endlich erzeugtem Körper L

Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über dem A-Körper $(\tilde{L}, \gamma)$ mit Charakteristik ε. Wir zeigen, dass $\underline{M}$ schon über einem endlich erzeugten Unterkörper L von $\tilde{L}$ definiert ist.

Satz 2.4.1 Sei $\underline{M} := (M, \tau_M)$ ein Anderson A-Motiv über $\tilde{L}$. Dann existiert ein endlich erzeugter Unterkörper $L \subseteq \tilde{L}$ und ein Anderson A-Motiv $\underline{N}$ über L, so dass $\underline{M}$ isomorph zu $\underline{N}$ ist. Also gilt $\underline{M} \cong \underline{N} \otimes_L \tilde{L}$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist M ein endlich präsentierter $A_{\tilde{L}}$-Modul, das heißt es existiert eine exakte Sequenz

$$A_{\tilde{L}}^{\oplus n} \xrightarrow{\rho} A_{\tilde{L}}^{\oplus m} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung ρ der Sequenz können wir bezüglich einer Basis durch eine $n \times m$ Matrix darstellen. Da M als Kokern dieser Abbildung definiert ist, benötigen wir nur endlich viele Koeffizienten aus $\tilde{L}$ um M zu definieren.
Auch für die Darstellung von τ_M bezüglich des Erzeugendensystems von M benötigen wir nur endlich viele Koeffizienten aus $\tilde{L}$. □

Mit Hilfe dieses Satzes zeigen wir in Kapitel 6, dass $\underline{M}$ über einer endlichen Körpererweiterung von $\mathrm{Quot}(A/\varepsilon)$ definiert ist.

2.5 Definition eines abelschen Anderson A-Moduls

Wir können eine weitere analoge Struktur zu abelschen Varietäten einführen und zwar abelsche Anderson A-Moduln. Wir zeigen in Theorem 2.5.3, dass die Kategorie der abelschen Anderson A-Moduln und die Kategorie der Anderson A-Motive anti-äquivalent sind. Dies ermöglicht uns, Erkenntnisse, die wir in der einen Kategorie erlangen, auf die andere zu übertragen.

Definition 2.5.1 (abelsches Anderson A-Modul) [Har08, 2.1.7] Seien $r, d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und (L, γ) ein A-Körper. Ein *abelscher Anderson A-Modul* von Rang r und Dimension d über L ist ein Paar (G, φ), bestehend aus einem affinen Gruppenschema $G := \mathbb{G}_{a,L}^d = \mathrm{Spec}\, L[x_1, ..., x_d]$ und einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathrm{End}_{L,\mathbb{F}_q}(G)$, $a \mapsto \varphi_a$ so, dass gilt:

(i) $(T_0(\varphi_a) - \gamma(a))^d = 0$ auf $\mathrm{T}_0\, G$, dem Tangentialraum an 0, für alle $a \in A$.

(ii) $\underline{M}(G) := \mathrm{Hom}_{L,\mathbb{F}_q}(G, \mathbb{G}_{a,L})$ ist ein lokal freier A_L-Modul von Rang r unter den Abbildungen

$$\begin{aligned} A \ni a : M \to M, \qquad & m \mapsto m \circ \varphi_a \\ L \ni b : M \to M, \qquad & m \mapsto b \circ m. \end{aligned}$$

Der Modul $\underline{M}(G)$ ist ein $L\{\tau\}$-Modul für den q-Frobenius-Endomorphismus $\tau : \underline{M}(G) \to \underline{M}(G)$, definiert durch $m \mapsto \mathrm{Frob}_{q,\mathbb{G}_{a,L}} \circ m$.

Wie bei Anderson A-Motiven, definieren wir Morphismen und Isogenien auch für abelsche Anderson A-Moduln. Durch den Funktor aus Theorem 2.5.3 wissen wir, dass diese den Morphismen und Isogenien bei Anderson A-Motiven entsprechen.

Definition 2.5.2 (Morphismus) [Har08, 2.1.7,2.3.1] Ein *Morphismus von abelschen Anderson A-Moduln* $f \in \mathrm{Hom}_L((G, \varphi), (G', \psi))$ ist ein Morphismus von Gruppenschemata $f : G \to G'$, so dass $\psi_a \circ f = f \circ \varphi_a$ für alle $a \in A$ gilt.
Ein solcher Morphismus heißt *Isogenie*, falls f als Morphismus von Gruppenschemata endlich und surjektiv ist. Falls solch eine Isogenie f existiert, heißen (G, φ) und (G', ψ) *isogen*.
Eine Isogenie f heißt *separabel*, falls der Kern von f geometrisch reduziert ist.

Zwischen abelschen Anderson A-Moduln und Anderson A-Motiven können wir, falls der zugrundeliegende Körper perfekt ist, eine Anti-Äquivalenz von Kategorien definieren.

Theorem 2.5.3 [Har08, Thm 2.1.10] Sei (L, γ) ein A-Körper und sei L perfekt. Dann ist der Funktor

$$\underline{M} : \left(\begin{smallmatrix} \text{abelsche Anderson} \\ A\text{-Moduln über } L \end{smallmatrix} \right) \to \left(\begin{smallmatrix} \text{Anderson} \\ A\text{-Motive über } L \end{smallmatrix} \right)$$
$$(G, \varphi) \mapsto \underline{M}(G, \varphi) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Hom}_{L,\mathbb{F}_q}(G, \mathbb{G}_{a,L}), \\ \tau_M : \sigma^* M \to M,\, m \otimes 1 \mapsto \tau m \end{smallmatrix} \right)$$

eine kontravariante Äquivalenz von Kategorien, die Ränge und Dimensionen erhält.

Bemerkung 2.5.4 Ist L nicht perfekt, so bleibt in Theorem 2.5.3 eine volltreue Abbildung von der Kategorie der abelschen Anderson A-Moduln in die Kategorie der Anderson A-Motive erhalten, welche jedoch nicht essentiell surjektiv ist.

Eine Eigenschaft des Funktors aus Theorem 2.5.3 ist es, dass dieser Isogenien und Separabilität erhält.

Satz 2.5.5 [Har08, Thm 2.3.12] Seien $\underline{G} = (G, \varphi)$ und $\underline{G}' = (G', \psi)$ zwei abelsche Anderson A-Moduln über L und (M, τ_M) sowie $(M', \tau_{M'})$ die zu den abelschen Anderson A-Moduln assoziierten Anderson A-Motive, das heißt $\underline{M}(\underline{G}) = (M, \tau_M)$ und $\underline{M}(\underline{G}') = (M', \tau_{M'})$. Dann gilt:

a) Ein Morphismus von abelschen Anderson A-Moduln $f : \underline{G} \to \underline{G}'$ ist genau dann eine Isogenie, wenn $\underline{M}(f) : \underline{M}' \to \underline{M}$ eine Isogenie von Anderson A-Motiven ist.

b) Eine Isogenie f von abelschen Anderson A-Moduln ist genau dann separabel, wenn die Isogenie $\underline{M}(f)$ von Anderson A-Motiven separabel ist.

3 Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation

Ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation nennt man auch ein Anderson A-Motiv mit vielen Endomorphismen, denn die Dimension der Q-Algebra E der komplexen Multiplikation entspricht dem Rang des Anderson A-Motivs und wir haben in Theorem 2.3.5 gesehen, dass die maximale Dimension $\mathrm{rk}(\underline{M})^2$ ist.
In diesem Kapitel definieren wir zuerst komplexe Multiplikation von Anderson A-Motiven und betrachten dann den Ganzheitsring der Algebra der komplexen Multiplikation $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Wir definieren weiter, was es heißt, komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ zu haben und beweisen, dass wir immer zu einem isogenen Anderson A-Motiv übergehen können, welches komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ hat. Außerdem konstruieren wir aus einem halbeinfachen CM-Anderson A-Motiv eine invertierbare Garbe auf der zu E gehörenden projektiven Kurve.

3.1 Definition von komplexer Multiplikation

Wir beginnen mit der Definition von Anderson A-Motiven mit komplexer Multiplikation. Als Beispiel eines Anderson A-Motivs mit komplexer Multiplikation geben wir einen Drinfeld-Modul von Rang 2 über $\mathbb{F}_q$ an. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir von der kommutativen Q-Algebra der komplexen Multiplikation fordern, dass sie zusätzlich halbeinfach sein soll.
Kommen wir nun zur Definition der komplexen Multiplikation.

Definition 3.1.1 (komplexe Multiplikation) Ein Anderson A-Motiv $\underline{M} = (M, \tau_M)$ über einem A-Körper L hat *komplexe Multiplikation*, falls $\mathrm{QEnd}(\underline{M}) := \mathrm{End}_L(\underline{M}) \otimes_A Q$ eine kommutative Q-Algebra E der Dimension $\dim_Q E = \mathrm{rk}\, \underline{M}$ enthält. Das bedeutet, dass E ein kommutativer Ring mit 1 ist und dass ein Ringhomomorphismus $Q \to E$ existiert.

Bemerkung 3.1.2 (komplexe Multiplikation) Ersetzen wir in Definition 3.1.1 $\underline{M}$ durch das abelsche Anderson A-Modul (G, φ), so erhalten wir komplexe Multiplikation bei abelschen Anderson A-Moduln.
Wenn wir von einer CM-Algebra E sprechen, so ist die Q-Algebra der komplexen Multiplikation gemeint. Ebenso bezeichnen wir die Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation auch als CM-Anderson A-Motive. Auch die abelschen Anderson A-Moduln mit komplexer Multiplikation bezeichnen wir mit CM abelschen Anderson A-Moduln.

Wir geben ein einfaches Beispiel für einen abelschen Anderson A-Modul mit komplexer Multiplikation an.

Beispiel 3.1.3 Sei $A = \mathbb{F}_q[t]$ und $L = \mathbb{F}_q$, das heißt der $\mathbb{F}_q$-Homomorphismus γ ist durch $\gamma(t) = 0$ gegeben. Sei $\varphi_t := \tau^2$ ein Drinfeld A-Modul von Rang 2, dass heißt ein abelscher Anderson A-Modul von Dimension 1. Definitionsgemäß gilt

$$\mathrm{End}_L(\varphi) = \big\{ f \in L\{\tau\} \;\big|\; f\varphi_a = \varphi_a f \text{ für alle } a \in A \big\}.$$

Wegen $L = \mathbb{F}_q$ gilt nun $\mathrm{End}_L(\varphi) = \big(L \cap \mathbb{F}_{q^2}\big)\{\tau\} = \mathbb{F}_q\{\tau\}$. Das bedeutet aber, dass der Endomorphismenring kommutativ ist, da $\tau b = b^q \tau = b\tau$ für $b \in L$ gilt.
Da τ^0 und τ^1 in $\mathbb{F}_q\{\tau\}$ liegen, können wir $\mathrm{End}_L(\varphi) = A\tau^0 \oplus A\tau^1$ schreiben. Durch $X \mapsto \tau$ erhalten wir eine Isomorphie $A[X]/(X^2 - t) \to A\tau^0 \oplus A\tau^1$.
Wählen wir $\mathrm{QEnd}(\varphi)$ als kommutative Q-Algebra E, so ist die Dimensionsbedingung

$$\dim_Q \mathrm{End}_L(\varphi) \otimes_A Q = \mathrm{rk}_A \,\mathrm{End}_L(\varphi) = 2$$

erfüllt.
Der Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-Modul $\varphi_t = \tau^2$ hat somit komplexe Multiplikation.

Im Folgenden sei die Q-Algebra der komplexen Multiplikation immer halbeinfach.

Definition 3.1.4 (halbeinfache Moduln und Ringe) a) Sei M ein Modul über einem Ring R. Dann heißt M *einfach*, falls M nicht-trivial ist und M keine nicht-trivialen R-Untermoduln besitzt.

Der Modul M heißt *halbeinfach*, falls er in die direkte Summe von einfachen R-Moduln M_i zerfällt.

b) Der Ring R heißt *halbeinfach*, falls R, als Linksmodul über sich selbst aufgefasst, halbeinfach ist.
Der Ring R heißt *einfach*, falls er nicht-trivial und halbeinfach ist und keine zweiseitigen Ideale außer 0 und sich selbst enthält.

Das folgende Lemma motiviert, warum wir von der CM-Algebra fordern, dass sie halbeinfach sein soll.

Lemma 3.1.5 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch E. Falls E halbeinfach ist, so zerfällt die CM-Algebra in die direkte Summe von Körpern.

Beweis: Nach Proposition [Bou58, Prop 5.4/12] ist das Zentrum von E die direkte Summe von Körpern. Da E kommutativ ist, folgt die Behauptung. □

3.2 Der Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$

In diesem Abschnitt betrachten wir den ganzen Abschluss von A in einer CM-Algebra E eines Anderson A-Motivs. Diesen Ganzheitsring bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Falls E ein Körper ist, so zeigen wir, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein lokal freier A-Modul von Rang $\dim_Q E$ ist und dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ die einzige maximale Ordnung in E ist.
Unter der Voraussetzung, dass E halbeinfach ist, zeigen wir, dass der Ganzheitsring in die direkte Summe der Ganzheitsringe der Summanden von E zerfällt. Damit können wir die im letzten Absatz genannten Ergebnisse auf halbeinfache Q-Algebren übertragen.

Definition 3.2.1 (Ganzheitsring) Sei E eine kommutative Q-Algebra von endlicher Dimension. Wir bezeichnen den ganzen Abschluss von A in E mit $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ und nennen ihn den *Ganzheitsring von E*.

Betrachten wir zuerst den Fall, dass die CM-Algebra E ein Körper ist.

Lemma 3.2.2 [Bou72, VII 2.5 Cor 3 zu Prop 5] Ist E eine endliche Körpererweiterung von Q, so ist der Ganzheitsring O_E ein Dedekindring.

In folgendem Lemma zeigen wir, dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein A-Modul von gleichem Rang wie das Anderson A-Motiv ist, falls das Anderson A-Motiv komplexe Multiplikation durch den Körper E hat.

Lemma 3.2.3 Für eine endliche Körpererweiterung E von Q gilt, dass der ganze Abschluss von A in E ein lokal freier A-Modul von Rang $r = [E : Q]$ ist.

Beweis: Nach [Bos03, S.61] ist $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ genau dann ein lokal freier A-Modul, wenn $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein flacher und endlich präsentierter A-Modul ist. In Lemma 2.1.2 haben wir gezeigt, dass A ein Dedekindring ist, wir müssen also zeigen, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ torsionsfrei und endlich erzeugt ist.
Aus dem Satz von Emmy Noether folgt direkt, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ endlich erzeugt ist. Nach Lemma 3.2.2 ist $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein Integritätsring und damit insbesondere torsionsfrei. Also ist $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein lokal freier A-Modul.
Nun gilt $\mathrm{rk}_A(\mathcal{O}_{\mathrm{E}}) = \dim_{\mathrm{Q}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_A Q = \dim_{\mathrm{Q}} E = r$ nach Voraussetzung. Somit ist $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein lokal freier A-Modul von Rang r. $\square$

Nun führen wir den Begriff der A-Ordnung ein und geben als Beispiel den Endomorphismenring $\mathrm{End}_L(\underline{M})$ eines Anderson A-Motivs $\underline{M}$ als A-Ordnung in der Quasi-Endomorphismenalgebra $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ an.

Definition 3.2.4 (A-Ordnung) [Rei03, S.110] Sei E eine Q-Algebra. Ein Unterring S von E heißt *A-Ordnung* in E, falls S das selbe Einselement wie E besitzt und S ein endlich erzeugter A-Untermodul in E ist, so dass $Q.S := Q \otimes_A S = E$ gilt. Insbesondere ist damit A ein Unterring von S.
Ist S in keiner anderen A-Ordnung in E echt enthalten, so heißt S *maximale Ordnung*.

Beispiel 3.2.5 Wir zeigen, dass der Endomorphismenring $\mathrm{End}_L(\underline{M})$ eine A-Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ist.
A ist ein Unterring von $\mathrm{End}_L(\underline{M})$, da alle Elemente aus A mit τ_M vertauschen. Nach Theorem 2.3.5 ist $\mathrm{End}_L(\underline{M})$ eine endlich erzeugte A-Algebra und nach Definition gilt $\mathrm{End}_L(\underline{M}) \otimes_A Q = \mathrm{QEnd}(\underline{M})$, also ist $\mathrm{End}_L(\underline{M})$ eine A-Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$.

Im Folgenden zeigen wir, dass der ganze Abschluss von A in einer endlichen Körpererweiterung E von Q die einzige maximale A-Ordnung in E ist.

Diese Eigenschaft werden wir im nächsten Abschnitt ausnutzen, um zu zeigen, dass wir zu jedem CM-Anderson A-Motiv ein isogenes finden, so dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ eine Teilmenge des Endomorphismenrings ist.

Lemma 3.2.6 Ist E eine endliche Körpererweiterung von Q, so ist der Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ aus Definition 3.2.1 die einzige maximale A-Ordnung in E.

Beweis: Aus Lemma 3.2.3 wissen wir, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein endlich erzeugter A-Modul ist. Nach Definition gilt $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_A Q = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{\mathrm{E}}) = E$ und damit wissen wir, dass der ganze Abschluß von A in der endlichen Körpererweiterung E von Q eine A-Ordnung in E ist.
Ist S eine weitere A-Ordnung in E, so besagt [Rei03][Satz (8.6)], dass jedes Element aus S ganz über A ist, insbesondere also im ganzen Abschluß von A liegt. Daraus folgt aber, das $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ maximal ist. □

Wir betrachten nun den Fall, dass E eine halbeinfache, kommutative Q-Algebra ist. Die voran gegangenen Überlegungen lassen sich auf diesen Fall verallgemeinern.

Lemma 3.2.7 Sei E kommutativ und halbeinfach, also eine endliche direkte Summe von Körpern E_i. Dann können wir den Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ in die direkte Summe der Ganzheitsringe $\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$ zerlegen.

Beweis: Wir wählen ein $x \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Wir können x als Summe $\sum_i^n x_i$ schreiben für $x_i \in E_i$. Definitionsgemäß ist x ganz über A, das heißt es existiert ein normiertes Polynom $P(X) = \sum_j^m a_j X^j \in A[X]$ mit $P(x) = 0$. Nun gilt

$$P(x) = \sum_j^m a_j x^j = \sum_j^m a_j (\sum_i^n x_i)^j = \sum_i^n \sum_j^m a_j x_i^j = \sum_i^n P(x_i),$$

da es sich bei $\sum_i^n x_i$ um eine endliche, direkte Summen handelt. Also sind alle $P(x_i) = 0$, falls $P(x) = 0$ ist. Dadurch wird $P(X) \in A[X]$ für jedes i durch x_i annulliert. Die x_i sind somit ganz über A und liegen in $\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$.
Umgekehrt zeigen wir, dass für $x_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$ die direkte Summe $x := \sum_i^n x_i$ in $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ liegt. Für alle x_i existiert ein normiertes Polynom $P_i(X) \in A[X]$ mit $P_i(x_i) = 0$. Definieren wir nun $P(X) := \prod_i P_i(X) \in A[X]$, so erhalten wir eine Ganzheitsgleichung für x. □

Korollar 3.2.8 Sei E eine halbeinfache, kommutative Q-Algebra und $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ der ganze Abschluss von A in E. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ die einzige maximale Ordnung in E.

Beweis: Nach Lemma 3.1.5 zerfällt E in die direkte Summe von Körpern E_i und nach Lemma 3.2.7 zerfällt der Ganzheitsring von E in die Ganzheitsringe der $\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$. Wie wir in Lemma 3.2.6 gezeigt haben, sind die $\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$ die einzigen maximalen A-Ordnungen in den Körpern E_i. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_A Q = \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathrm{E_i}} \otimes_A Q = \bigoplus_i E_i = E$ gilt und da $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein Unterring von E ist, der A enthält und die endliche Summe von endlichen A-Moduln über A endlich erzeugt ist, folgt, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ eine A-Ordnung in E ist.
Die Maximalität von $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ folgt aus [Rei03, Satz (8.6)]. □

3.3 Komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$

In diesem Abschnitt betrachten wir, soweit nicht anders angegeben, ein Anderson A-Motiv $\underline{M}$ mit komplexer Multiplikation durch eine kommutative, halbeinfache Q-Algebra E mit $\dim_{\mathrm{Q}} E = \operatorname{rk} \underline{M}$.
Wir zeigen, dass bis auf Isogenie jedes Anderson A-Motiv komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ hat. Dazu definieren wir komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ wie folgt.

Definition 3.3.1 (komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$) Ein Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über L hat komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, falls der Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ von E in dem Endomorphismenring $\operatorname{End}_L(\underline{M})$ von $\underline{M}$ liegt.

Dazu äquivalent ist die Behauptung, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \operatorname{End}_L(\underline{M}) \cap E$ gilt, denn nach Definition von $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ und komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ gilt $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subseteq \operatorname{End}_L(\underline{M}) \cap E$. Da der Endomorphismenring eine A-Ordnung ist, gilt insbesondere, dass jedes Element von $\operatorname{End}_L(\underline{M})$ ganz über A ist. Somit folgt $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \supseteq \operatorname{End}_L(\underline{M})$.

Um zu zeigen, dass bis auf Isogenie jedes Anderson A-Motiv komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ hat, nutzen wir folgenden Satz über Anderson A-Motive aus.

Satz 3.3.2 [BH09, Thm 10.7] Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E. Dann tritt jede maximale Ordnung in $\operatorname{QEnd}(\underline{M})$ als Endomorphismenring $f \operatorname{End}_L(\underline{M}')f^{-1} \subset \operatorname{QEnd}(\underline{M})$ eines isogenen Anderson A-Motivs $\underline{M}'$ auf. Dabei ist $f : \underline{M}' \to \underline{M}$ eine Isogenie der Anderson A-Motive und wir setzen $f^{-1} := a^{-1} \cdot \hat{f}$ für eine duale Isogenie $\hat{f}$ mit $\hat{f} \circ f = a \cdot \mathrm{id}_{\underline{M}'}$ für ein $a \in A \setminus \{0\}$.

Wir zeigen im Folgenden, dass wir zu einem isogenen Anderson A-Motiv übergehen können, welches komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ hat. Dann können wir davon ausgehen, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subseteq \mathrm{End}_L(\underline{M})$ gilt.

Korollar 3.3.3 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E, dann existiert ein isogenes Anderson A-Motiv $\underline{M}'$ mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}'}$, dem Ganzheitsring von $E' := f^{-1} \cdot E \cdot f$, wobei $f : \underline{M}' \to \underline{M}$ die Isogenie der Anderson A-Motive ist.

Beweis: Wir betrachten den Ring $T := \{g \in \mathrm{QEnd}(\underline{M}) \mid g \text{ ganz über } A\}$ derjenigen Quasi-Endomorphismen von $\underline{M}$, welche ganz über A sind.
Wenn wir zeigen können, dass T eine maximale Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ist, so folgt mit Satz 3.3.2, dass T der Endomorphismenring eines isogenen Anderson A-Motivs $\underline{M}'$ ist, also

$$T = f \cdot \mathrm{End}_L(\underline{M}') \cdot f^{-1}$$

für eine Isogenie f. Wir setzen $T' := f^{-1} \cdot T \cdot f = \mathrm{End}_L(\underline{M}')$. Nach Beispiel 3.2.5 ist der Endomorphismenring von $\underline{M}'$ eine A-Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M}')$ und nach [Rei03, Satz (8.6)] ist jedes Element einer A-Ordnung ganz über A. Wir erhalten $T' \subseteq \{x \in \mathrm{QEnd}(\underline{M}') \mid x \text{ ganz über } A\}$. Die umgekehrte Inklusion gilt auch, da $x \in \mathrm{QEnd}(\underline{M}')$ genau dann ganz über A ist, wenn $f \circ x \circ f^{-1}$ in T liegt.
Damit folgt $\mathcal{O}_{\mathrm{E}'} \subseteq \mathrm{End}_L(M') = T'$, denn

$$T' \cap E' = \{x \in \mathrm{QEnd}(\underline{M}') \cap E' \mid x \text{ ganz über } A\} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}'}\,.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass T eine maximale Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ist. Definitionsgemäß ist T ein Unterring von $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$, der A enthält und es gilt $T \otimes_A Q \subseteq \mathrm{QEnd}(\underline{M})$.
Jedes Element $g \in \mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ist ganz über Q, da $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ nach [BH08, Thm 9.5] endlich-dimensional über Q ist. Wir wählen das Minimalpolynom $\mathrm{mipo}_{g/Q}$ von g über Q als Ganzheitsgleichung. Nun können wir g mit einem geeignetem $a \in A$ derart multiplizieren, dass der Nenner des Minimalpolynoms verschwindet. So erhalten wir eine Ganzheitsgleichung für ag in $A[X]$. Damit ist aber $ag \in T$ und $g \in (A \setminus \{0\})^{-1} T$. Also gilt $\mathrm{QEnd}(\underline{M}) = T \otimes_A Q$.
Um zu zeigen, dass T als A-Modul endlich erzeugt ist, betrachten wir das Zentrum Z von $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$. Nach Voraussetzung ist E halbeinfach und, wie wir in Satz 4.2.5 sehen

werden, ist damit auch $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ halbeinfach. Somit zerfällt das Zentrum in die direkte Summe von Körpern Z_i ([Bou58, Prop 5.4/12]). Nun können wir nach Lemma 3.2.7 den Ganzheitsring von Z zerlegen und erhalten mit dem Satz von Emmy Noether, dass die Summanden $\mathcal{O}_{Z_i}$ als A-Moduln endlich erzeugt sind.
Entsprechend zerlegen wir T und betrachten die Summanden T_i, die nach [Rei03, Thm (10.3)] über $\mathcal{O}_{Z_i}$ endlich erzeugt sind. Damit ist T als endlich Summe der T_i über A endlich erzeugt.
Außerdem ist T als A-Ordnung maximal, denn wenn S eine weitere A-Ordnung in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ist, wissen wir, dass ein Element $x \in S$ ganz über A ist, da S ein endlich erzeugter A-Modul ist. Damit liegt x aber schon in T. □

Wir geben nun ein Beispiel für ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ an.

Beispiel 3.3.4 Sei $A = \mathbb{F}_q[t]$, $L = \mathbb{F}_q$ und $\gamma : A \to L$ gegeben durch $t \mapsto \theta := 0$.
Wir setzen $M := \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)]$. Dieser Ring ist ein Modul über sich selbst und insbesondere ein A-Modul, da A durch die Vorschrift $t \mapsto \frac{x^2}{1-x}$ eine Teilmenge von M ist. Wir erhalten in M die Gleichheit

$$(1 + x + t)(1 - x) = 1. \tag{3.3.1}$$

Also gilt $M \cong A \oplus Ax$ durch $x^2 \mapsto t - tx$ und $\frac{x^2}{1-x} \hookleftarrow t$.
Weiter setzen wir $\tau_M : \sigma^* M \to M$ als $\tau_M := x^2$. Nach Beispiel 2.3.3 müssen wir, um zu zeigen, dass (M, τ_M) ein Anderson A-Motiv von Rang und Dimension 2 ist, die Determinante von τ_M überprüfen. Dazu stellen wir τ_M bezüglich der A-Basis $(1, x)$ von M dar und erhalten mit Hilfe von (3.3.1)

$$\tau_M = x^2 = t - tx$$

und

$$\tau_M \cdot x = x^3 = (t^2 + t)x - t^2.$$

Daraus ergibt sich die Basisdarstellung $\tau = \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ -t & t+t^2 \end{pmatrix}$ und es gilt $\det \tau = t^2 = \delta(t - \theta)^2$ für $\delta = 1$. Damit ist (M, τ_M) ein Anderson A-Motiv von Rang und Dimension 2.
Jetzt wollen wir zeigen, dass $\underline{M}$ komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ hat. Wir suchen

also eine kommutative Q-Unteralgebra von $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ der Dimension 2, so dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ eine Teilmenge des Endomorphismenrings ist.
Da M ein Modul über $B := \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)]$ ist, gilt insbesondere $B \subseteq \mathrm{End}_L(\underline{M})$ und auch $B \otimes_A Q \subseteq \mathrm{QEnd}(\underline{M})$. $B \otimes_A Q$ ist eine kommutative Q-Algebra der Dimension 2, denn

$$\begin{aligned} B \otimes_A Q &\overset{(3.3.1)}{=} \mathbb{F}_q[t,x]/\left(x^2 - t(1-x)\right) \otimes_{\mathbb{F}_q[t]} \mathbb{F}_q(t) \\ &= Q[x]/\left(x^2 - t(1-x)\right) \\ &\cong \mathbb{F}_q(x). \end{aligned}$$

Damit haben wir die CM-Algebra $E := \mathbb{F}_q(x)$ gefunden.
Wir müssen also noch zeigen, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ im Endomorphismenring von $\underline{M}$ liegt. Dazu betrachten wir den Ring $B = \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)] \cong A \oplus Ax$ und zeigen, dass B der ganze Abschluss von A in E ist. Es gilt aber $A \subseteq B \subseteq E$ und da wir wissen, dass B ein endlich erzeugter A-Modul ist folgt $B \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \left\{x \in E \mid x \text{ ganz über } A\right\}$.
Wie oben können wir mit Hilfe von (3.3.1) den Ring B schreiben als $B = \mathbb{F}_q[t,x]/\left(x^2 - t(1-x)\right)$. Da $\frac{\partial}{\partial t}(x^2 - t(1-x)) = x - 1$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - t(1-x)) = 2x + t$ und $(x^2 - t(1-x))$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist B regulär und somit normal, also $B = \left\{x \in \mathrm{Quot}(B) \mid x \text{ ganz über } B\right\}$.
Da $\mathrm{Quot}(B) = \mathbb{F}_q(x) = E$ gilt, ist wie oben behauptet $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)]$ und liegt im Endomorphismenring von $\underline{M}$.

Nachdem wir ein Beispiel für Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ mit Körper E gesehen haben, kommen wir nun zu einer allgemeinen Aussage über Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Wir wollen solch ein Anderson A-Motiv als τ-Modul über $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ auffassen. Dazu müssen wir uns zunächst den Ring $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ näher betrachten. Dieser Ring ist im Allgemeinen kein Körper.
Da die Körpererweiterung $L/\mathbb{F}_q$ separabel ist, ist nach [Bou58, Chp 8 Cor 7.6/4] auch $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ halbeinfach und kommutativ, also eine direkte Summe von Körpern. Sei

$$\mathbb{F}_{q^f} := \left\{\alpha \in L \mid \alpha^{q^f} = \alpha\right\}$$

die größte algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$, die sowohl in E, als auch in L enthalten ist. Da E/Q endlich ist, ist diese insbesondere endlich über $\mathbb{F}_q$. Den Ring $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L$

können wir nun folgendermaßen in die direkte Summe von Körpern zerlegen:

$$\begin{aligned} E \otimes_{\mathbb{F}_q} L &= \bigoplus_{\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q)} E \otimes_{\mathbb{F}_{q^f}} L \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} E \otimes_{\mathbb{F}_q} L \big/ \big(b \otimes 1 - 1 \otimes b^{q^i} \bigm| b \in \mathbb{F}_{q^f}\big) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Dabei wird $\mathfrak{a}_i := \big(b \otimes 1 - 1 \otimes b^{q^i} \bigm| b \in \mathbb{F}_{q^f}\big)$ durch σ^* auf $\mathfrak{a}_{i+1}$ geschickt.
Als Unterring von $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ zerfällt auch $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} := \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ entsprechend (3.3.2) in die direkte Summe der Integritätsringe $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} / \mathfrak{a}_i$, die jeweils Unterringe von $(E_i \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i$ sind:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} / \mathfrak{a}_i \tag{3.3.3}$$

Damit können wir nun Anderson A-Motive als τ-Module über $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ auffassen.

Satz 3.3.5 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, wobei E ein kommutativer Körper sei. Dann ist $\underline{M}$ ein τ-Modul von Rang 1 über $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, das heißt

a) M ist ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} := \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$-Modul von Rang 1.

b) $\tau_M : \sigma^* M \to M$ ist ein injektiver $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Homomorphismus.

Beweis: zu a) Mit der Verknüpfung $M \times \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} \to M$ durch $(m, f \otimes b) \mapsto b \cdot f(m)$ erhält M eine $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modulstruktur.
Wir zeigen, dass M ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul ist, indem wir den Hauptsatz für Moduln über Hauptidealringen auf die Lokalisierung von M anwenden und zeigen, dass diese torsionsfrei ist. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind erfüllt, da $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein Dedekindring ist und somit jeder lokale Ring von $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ ein Hauptidealring ist.
Nun betrachten wir ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$. Es gilt $(\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}})_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} / \mathfrak{a}_i)_{\mathfrak{p}}$ nach (3.3.3) für ein $i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Betrachten wir $M \otimes_{A_L} Q_L$ als $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L$-Modul, so zerfällt $M \otimes_{A_L} Q_L$ entsprechend der Zerlegung 3.3.2 und es gilt

$$(M)_{\mathfrak{p}} = (M/\mathfrak{a}_i)_{\mathfrak{p}} \subseteq (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i$$

für ein $i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Betrachten wir nun $a \cdot m = 0$ für ein $a \neq 0$ aus $(\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}})_{\mathfrak{p}}$ und $m \in (M)_{\mathfrak{p}}$, so folgt mit obigen Überlegungen, dass $a \in (E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i$ und $m \in (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i$ ist.

Da $(E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i$ ein Körper ist, existiert das Inverse von a in $(E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i$ und es folgt $m = 0$. Also ist $(M)_{\mathfrak{p}}$ torsionsfrei.
Nach dem Hauptsatz für Moduln über Hauptidealringen ist damit $(M)_{\mathfrak{p}}$ ein freier $(\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}})_{\mathfrak{p}}$-Modul und somit ist M ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul.
Nun betrachten wir den Rang von M als $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul. Dazu greifen wir auf die Zerlegung von $M \otimes_{A_L} Q_L$ in $(E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i$-Moduln entsprechend (3.3.2) zurück. Definitionsgemäß gilt $\mathrm{rk}_{A_L} M = \dim_{Q_L} M \otimes_{A_L} Q_L$ und aufgrund der Zerlegung gilt

$$\dim_{Q_L} M \otimes_{A_L} Q_L = \sum_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} \dim_{Q_L} (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i.$$

Der Morphismus τ_M bildet den i-ten Summanden isomorph auf den $i+1$-ten Summanden von $\sum\limits_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i$ ab. Diese sind somit gleichdimensional und wir setzen $s := \dim_{(E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i} (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i$ als ihre Dimension über dem Körper $E \otimes_{\mathbb{F}_q} L/\mathfrak{a}_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$. Betrachten wir nun die Dimension eines Summanden über Q_L, so gilt

$$\dim_{Q_L} (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} s \cdot \dim_{Q_L} (E \otimes_{\mathbb{F}_q} L)/\mathfrak{a}_i. \tag{3.3.4}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(\underline{M}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}} \dim_{Q_L} (M \otimes_{A_L} Q_L)/\mathfrak{a}_i \\ &\overset{(3.3.4),(3.3.2)}{=} s \cdot \dim_{Q_L} E \otimes_{\mathbb{F}_q} L \\ &= s \cdot \dim_Q E \\ &= s \cdot \mathrm{rk}(\underline{M}). \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere $s = 1$ und damit ist M ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul von Rang 1.

zu b) Wir definieren $\sigma : \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L \to \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ durch $f \otimes b \mapsto f \otimes b^q$. Da $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ein A-Modul ist, existiert die Inklusion $A \otimes_{\mathbb{F}_q} L \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L \\ A \otimes_{\mathbb{F}_q} L \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, hook] & A \otimes_{\mathbb{F}_q} L \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{3.3.5}$$

Dabei ist $\sigma : A_L \to A_L$ durch $a \otimes b \mapsto a \otimes b^q$ definiert.

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} M \otimes_{L,\sigma} L \to & M \otimes_{A_L,\sigma} A_L \\ m \otimes l \mapsto & m \otimes l, \end{aligned}$$

so ist diese Abbildung surjektiv, da wegen $m \otimes \sum_i a_i \otimes l_i = \sum_i (a_i m \otimes l_i)$ jedes Element aus $M \otimes_{A_L,\sigma} A_L$ in $M \otimes_{L,\sigma} L$ liegt. Die Abbildung ist somit bijektiv, da der Kern nur die Null enthält.

Da σ auf $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ die Identität ist, gilt

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_{A_L,\sigma} A_L & \cong & M \otimes_{L,\sigma} L & \cong & M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}},\sigma} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} \\ m \otimes l & \leftarrow\!\shortmid & m \otimes l & \mapsto & m \otimes l. \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \sigma^* M \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, equal] & M \arrow[d, equal] \\ M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}},\sigma} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

der A_L-Homomorphismus τ_M auch ein $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modulhomomorphismus ist.

Dazu zeigen wir zunächst, dass $\sigma^* M$ durch $(\sigma^* m, f \otimes b) \mapsto b \cdot (\sigma^* f)(\sigma^* m)$ ein $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul ist. Es gilt wegen (3.3.5)

$$\sigma^* f(\sigma^* m) = (f \otimes 1)(m \otimes 1) = f(m) \otimes 1 = m \otimes f = f \cdot (m \otimes 1) \in M \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}},\sigma} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} .$$

Also fehlt nur noch die $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Linearität von τ_M:

$$\begin{aligned} \tau_M\big((f \otimes b)(m \otimes 1)\big) &= \tau_M\big(b \cdot (\sigma^* f)(\sigma^* m)\big) \\ &= b \cdot \tau_M\big(\sigma^* f(\sigma^* m)\big) \\ &\overset{f \in \mathcal{O}_\mathrm{E} \subseteq \mathrm{End}_L(\underline{M})}{=} b \cdot f\big(\tau_M(\sigma^* m)\big) \\ &= (f \otimes b)\tau_M\big((m \otimes 1)\big). \end{aligned}$$

Die Injektivität von τ_M bleibt erhalten. □

Nun betrachten wir die Ergebnisse aus Satz 3.3.5 unter der schwächeren Voraussetzung, dass E eine kommutative, halbeinfache Q-Algebra von Dimension $\mathrm{rk}_{A_L}(M)$ ist und kein Körper.

Korollar 3.3.6 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$, wobei E eine halbeinfache CM-Algebra sei. Dann ist $\underline{M}$ ein τ-Modul von Rang 1 über $\mathcal{O}_\mathrm{E}$.

Beweis: Wir haben in Lemma 3.2.7 gezeigt, dass $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ in die direkte Summe der $\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}}$ zerfällt. Wir können die einfachen Summanden von $M = \bigoplus_i M_i$ nach Satz 3.3.5 als lokal freie $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_i} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$-Moduln von Rang 1 auffassen.
Betrachten wir ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} = \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathrm{E_i}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ so wissen wir, dass genau ein $i \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ existiert, so dass $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E_i}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$. Somit gilt

$$\begin{aligned} (M)_\mathfrak{p} &= (M_i)_\mathfrak{p} \\ &\cong (\mathcal{O}_{\mathrm{E_i}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L)_\mathfrak{p} \\ &= (\mathcal{O}_\mathrm{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} L)_\mathfrak{p}, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung. □

3.4 Konstruktion einer invertierbaren Garbe

In diesem Abschnitt konstruieren wir aus einem Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über einem algebraisch abgeschlossenem Körper L mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ eine invertierbare Garbe auf der zu E gehörenden projektiven Kurve. Dabei ist E die halbeinfache CM-Algebra von $\underline{M}$.
Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, können wir jedes Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ als τ-Modul über $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ auffassen. Es ist dann nur noch ein kleiner Schritt, den $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul M mit einer invertierbaren Garbe $\tilde{M}$ auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ zu assoziieren.

Lemma 3.4.1 Sei $\underline{M} = (M, \tau_M)$ ein halbeinfaches Anderson A-Motiv über L mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$. Dann existiert eine lokal freie Garbe $\tilde{M}$ auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ von Rang 1 mit $\Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \tilde{M}) = M$ als $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul.

Beweis: In Satz 3.3.5 beziehungsweise in Korollar 3.3.6 haben wir gezeigt, dass M ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul von Rang 1 ist.
Da $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ nach Satz 3.2.2 noethersch ist, existiert nach [Har97, Cor II.5.5] eine Äquivalenz

von Kategorien zwischen der Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Moduln und der Kategorie der Garben von kohärenten $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}$-Moduln.
Dabei wird dem $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul M die zu M assoziierte Garbe $\tilde{M}$ von kohärenten $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}$-Moduln zugeordnet. Das bedeutet, dass $\tilde{M}(U)$ ein $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}(U)$-Modul für jede offene Teilmenge $U \subset \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ ist und dass nach Definition

$$\tilde{M}(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}) = \Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \tilde{M}) = M$$

als $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul gilt. Der inverse Funktor ordnet dabei einer Garbe $\mathcal{M}$ den Modul $\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \mathcal{M})$ zu.
Um zu zeigen, dass $\tilde{M}$ lokal frei ist, betrachten wir die Halme $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$ der Garbe $\tilde{M}$ bei den Primidealen $\mathfrak{p}$ aus $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$. Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ ist aber der Halm $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}}$ isomorph zu der Lokalisierung des $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Moduls $M_{\mathfrak{p}}$ (siehe [Har97, Prop II.5.1]).
Da der Modul lokal frei ist, folgt $(\tilde{M})_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}},\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$. Mit [Har97, Ex II.5.7 b)] folgt dann, dass $\tilde{M}$ lokal frei von Rang 1 ist. □

Um $\tilde{M}$ auf eine projektive Kurve, die $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ enthält, erweitern zu können, betrachten wir zunächst die zu E gehörige Kurve $\tilde{C}$.

Bemerkung 3.4.2 Da E halbeinfach ist, und somit nach Lemma 3.1.5 in die direkte Summe von Körpern zerfällt, stellen wir die folgenden Überlegungen nur für E als endliche Körpererweiterung von Q an.
Sei also E/Q eine endliche Körpererweiterung und $\tilde{C}$ die zu dieser Körpererweiterung gehörige projektive und reguläre Kurve mit Funktionenkörper $E = \mathbb{F}_q(\tilde{C})$. Sei $\pi : \tilde{C} \to C$ die zugehörige Abbildung der Kurven. Wir definieren, da $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ eine echte Teilmenge von $\tilde{C}$ ist, $\tilde{\infty} := \tilde{C} \setminus \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Es gilt $\tilde{\infty} = \pi^{-1}(\infty)$ für den $\mathbb{F}_q$-wertigen Punkt $\infty \in C$.
Betrachten wir die Erweiterung $\tilde{C} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec}\mathbb{F} =: \tilde{C}_{\mathbb{F}}$, für einen algebraischen Abschluss $\mathbb{F}$ von $\mathbb{F}_q$, so können wir die Zusammenhangskomponenten $\tilde{C}_{\mathbb{F},\nu}$ von $\tilde{C}_{\mathbb{F}}$ betrachten. Da nach Voraussetzung $L \supseteq \mathbb{F}$ enthält, können wir mit $\tilde{C}_{L,\nu}$ die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{C}_L := \tilde{C} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} L$ bezeichnen, sowie $\tilde{\infty}_L := \tilde{\infty} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} L = \{\tilde{\infty}_{1,L}, \dots, \tilde{\infty}_{s,L}\}$ setzen.
Es gilt wie oben $\tilde{C}_L = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} \cup \tilde{\infty}_L$.
Ist nun E kein Körper, so konstruieren wir wie oben für jeden Körper E_i eine Kurve $\tilde{C}_i$ und definieren in diesem Fall $\tilde{C} := \bigcup_i \tilde{C}_i$ und $\pi := \bigcup_i \pi_i$.

Wir wollen nun die Garbe $\tilde{M}$ aus Lemma 3.4.1 auf $\tilde{C}_L$ erweitern und müssen sie somit auf $\tilde{\infty}_L$ definieren.

Lemma 3.4.3 Es existiert eine lokal freie Garbe $\bar{\mathcal{M}}$ von Rang 1 auf $\tilde{C}_L$ mit $M = \Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \bar{\mathcal{M}})$ als $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul.

Beweis: Nach Definition der lokal freien Garbe $\tilde{M}$ von Rang 1 existiert eine offene, affine Überdeckung von $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ durch U_i mit $\bigcup_i U_i = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ so, dass $\tilde{M}|_{U_i}$ isomorph zu $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}|_{U_i}$ ist. Das heißt, dass eine offene Überdeckung von $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ existiert, so dass

$$\alpha_i : \tilde{M}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}|_{U_i}$$

und

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}}|_{U_i \cap U_j} \qquad \text{auf } M|_{U_i \cap U_j}$$

gilt. Damit können wir auf der durch

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 :=& U_0 \cup (\tilde{C}_L \setminus \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}) \\ \bar{U}_i :=& U_i \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für alle } i \neq 0 \\ \bigcup_i \bar{U}_i =& \tilde{C}_L = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}} \cup \tilde{\infty}_L \end{aligned}$$

definierten Überdeckung $\bar{\mathcal{M}}|_{\bar{U}_i}$ als $\mathcal{O}_{\bar{U}_i}$ definieren. Diese verkleben wir durch

$$\begin{cases} \alpha_j \circ \alpha_i & \text{auf } \bar{U}_i \cap \bar{U}_j = U_i \cap U_j \text{ für } i \neq 0 \\ \mathrm{id} & \text{auf } \bar{U}_0 \cap \bar{U}_0. \end{cases}$$

zu einer Garbe $\bar{\mathcal{M}}$ auf $\tilde{C}_L$, welche nach Konstruktion wieder lokal frei von Rang 1 ist mit $M = \Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \bar{\mathcal{M}})$ als $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Modul, beziehungsweise $M = \Gamma(\operatorname{Spec} A_L, \pi_* \bar{\mathcal{M}})$ als A_L-Modul. $\square$

4 Eigenschaften eines Anderson A-Motivs mit CM

In diesem Kapitel untersuchen wir Eigenschaften von Anderson A-Motiven im Zusammenhang mit der Eigenschaft der komplexen Multiplikation. Dazu definieren wir das zu einem Anderson A-Motiv assoziierte lokale σ-Isoshtuka und führen die Begriffe der Halbeinfachheit, Reinheit sowie Uniformisierbarkeit eines Anderson A-Motivs ein.
In Abschnitt 4.2 zeigen wir, dass die Voraussetzung an die Q-Algebra der komplexen Multiplikation, halbeinfach zu sein, impliziert, dass das Anderson A-Motiv selbst halbeinfach ist. Bei einfachen Anderson A-Motiven ist dies jedoch nicht der Fall.
Im darauf folgenden Abschnitt werden wir an einem Beispiel sehen, dass Reinheit nicht aus komplexer Multiplikation folgt. Mit Hilfe der Theorie der lokalen Isoshtuka werden wir ein Anderson A-Motiv konstruieren, welches bei ∞ zwei verschiedene Steigungen hat und somit nicht rein ist.
In Abschnitt 4.4 werden wir mit Hilfe eines Gegenbeispiels sehen, dass abelsche Anderson A-Moduln mit komplexer Multiplikation nicht notwendigerweise uniformisierbar sind. Dazu werden wir uns die Eigenschaft zu Nutze machen, dass über $\mathbb{C}_\infty$ die uniformisierbaren, abelschen Anderson A-Moduln genau die uniformisierbaren Anderson A-Motive sind.

4.1 Lokale Shtuka und Tate-Moduln

In diesem Abschnitt führen wir die Theorie der lokalen σ-Isoshtuka ein, die Definitionen und Ergebnisse sind dabei aus [Har08, Kapitel 3] entnommen.
Dabei benötigen wir noch weitere Notationen. Sei v ein abgeschlossener Punkt der Kurve C. Der lokale Ring bei v, $\mathcal{O}_{C,v}$, ist ein diskreter Bewertungsring mit $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{C,v}) = Q$.

Die durch v induzierte Bewertung auf Q bezeichnen wir wieder mit v und definieren $v(a) := \mathrm{ord}_v(a)$ für $a \in Q$.
Sei $A_v := \widehat{\mathcal{O}_{C,v}}$ die Komplettierung von $\mathcal{O}_{C,v}$ bezüglich v und $Q_v := \mathrm{Quot}(A_v)$ der Quotientenkörper von A_v. Außerdem definieren wir $A_{v,L} := A_v \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} L$ für eine Körpererweiterung L über $\mathbb{F}_q$ und $Q_{v,L} := A_{v,L}\left[\frac{1}{z_v}\right]$.

Mit dieser Notation können wir die benötigten Begriffe definieren.

Definition 4.1.1 (lokale σ-Shtuka) Sei (L, γ) ein A-Körper.

a) Ein *lokales σ-Shtuka* bei $v \neq \infty$ über L von Rang r ist ein Paar $\underline{\widehat{M}} := (\widehat{M}, \tau_{\widehat{M}})$, wobei $\widehat{M}$ ein freier $A_{v,L}$-Modul von Rang r und $\tau_{\widehat{M}} : \sigma^*\widehat{M} \to \widehat{M}$ ein injektiver $A_{v,L}$-Homomorphismus ist.

b) Ein *lokales σ-Isoshtuka* bei v über L von Rang r ist ein Paar $\underline{\widehat{V}} = (\widehat{V}, \tau_{\widehat{V}})$ mit einem freien $Q_{v,L}$-Modul $\widehat{V}$ von Rang r und einem $Q_{v,L}$-Isomorphismus $\tau_{\widehat{V}} : \sigma^*\widehat{V} \to \widehat{V}$.

c) Ein *Morphismus zwischen lokalen σ-(Iso-)Shtuka* $\widehat{f} : \underline{\widehat{M}} \to \underline{\widehat{N}}$ (bzw. $\widehat{f} : \underline{\widehat{V}} \to \underline{\widehat{W}}$) ist ein $A_{v,L}$-Homomorphismus mit $\tau_{\widehat{N}} \circ \sigma^*\widehat{f} = \widehat{f} \circ \tau_{\widehat{M}}$ (bzw. $Q_{v,L}$-Homomorphismus mit $\tau_{\widehat{W}} \circ \sigma^*\widehat{f} = \widehat{f} \circ \tau_{\widehat{V}}$).

Ein lokales σ-Shtuka kann man wie folgt zu einem Anderson A-Motiv assoziieren.

Definition 4.1.2 (lokale σ-(Iso-)Shtuka bei v assoziiert zu $\underline{M}$) Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L und $v \in \mathrm{Spec}\, A$ ein abgeschlossener Punkt. Dann ist

$$\underline{\widehat{M}}_v\underline{M} := (M \otimes_{A_L} A_{v,L}, \tau_M \otimes 1)$$

das *lokale σ-Shtuka bei v assoziiert zu $\underline{M}$*.
Für $v \in C$ ist das *lokale σ-Isoshtuka von $\underline{M}$* bei v definiert durch

$$\underline{\widehat{V}}_v\underline{M} := (M \otimes_{A_L} Q_{v,L}, \tau_M \otimes 1).$$

Wir definieren den Tate-Modul eines Anderson A-Motivs mit Hilfe des assoziierten σ-Shtukas.

Definition 4.1.3 (Tate-Modul) [BH09, Def 3.3/4.1] Den *Tate-Modul eines lokalen σ-Shtukas $\underline{\widehat{M}}$ bei v* definieren wir als den $\mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$-Modul von $\tau_{\widehat{M}}$-Invarianten

$$T_v\underline{\widehat{M}} := (\underline{\widehat{M}} \otimes_{A_{v,L}} A_{v,L^{sep}})^{\tau_{\underline{\widehat{M}}}}.$$

Den *rationalen Tate-Modul von* $\underline{\widehat{M}}$ *bei* v definieren wir als den $\mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$-Modul

$$V_v\underline{\widehat{M}} := T_v\underline{\widehat{M}} \otimes_{A_v} Q_v.$$

Den *v-adischen Tate-Modul eines Anderson A-Motivs* $\underline{M}$ über L für $v \neq \varepsilon$ definieren wir als den Tate-Modul des assoziierten σ-Shtukas

$$T_v\underline{M} := T_v\big(\underline{\widehat{M}}_v\underline{M}\big).$$

Ebenso definieren wir den *rationalen v-adischen Tate-Modul von* $\underline{M}$ als den rationalen Tate-Modul des assoziierten lokalen σ-Shtukas,

$$V_v\underline{M} := V_v\big(\underline{\widehat{M}}_v\underline{M}\big).$$

4.2 halbeinfache Anderson A-Motive

Bei Anderson A-Motiven mit komplexer Multiplikation haben wir bisher gefordert, dass die CM-Algebra E halbeinfach ist. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass daraus folgt, dass das Anderson A-Motiv selbst halbeinfach ist.

Zuerst müssen wir aber die Definition eines einfachen beziehungsweise eines halbeinfachen Anderson A-Motivs geben.

Definition 4.2.1 (halbeinfaches Anderon A-Motiv) [BH08, Def 7.1] Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L.

a) $\underline{M}$ heißt *einfach*, falls $\underline{M}$ nicht-trivial ist und $\underline{M}$ keine Faktormotive außer $\underline{0}$ und sich selbst besitzt.

b) $\underline{M}$ heißt *halbeinfach*, falls $\underline{M}$ isogen zu einer direkten Summe von einfachen Anderson A-Motiven $\underline{M}_i$ ist, dass heißt $\underline{M} \approx \bigoplus\limits_i \underline{M}_i$.

Für einfache beziehungsweise halbeinfache Anderson A-Motive können wir folgende Aussagen über den Quasi-Endomorphismenring treffen.

Satz 4.2.2 [BH08, Thm 7.8] Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L. Dann gilt:

a) Falls $\underline{M}$ einfach ist, so ist $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ein Schiefkörper über Q.

b) Falls $\underline{M}$ halbeinfach ist, so zerfällt $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ in die endliche direkte Summe von vollen Matrixalgebren über den Schiefkörpern $\mathrm{QEnd}(\underline{M}_i)$ über Q.

Es stehen uns nun folgende Resultate zur Verfügung.

Satz 4.2.3 (Tate-Vermutung) [Tam94, §2] Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über einem endlich erzeugten A-Körper L und sei $v \in \operatorname{Spec} A$ mit $v \neq \epsilon := \ker(\gamma)$. Dann gilt

$$\mathrm{QEnd}(\underline{M}) \otimes_Q Q_v \cong \mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M})$$

mit $G := \mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$.

Lemma 4.2.4 [BH09, Thm 6.11/2 Rem 6.12] Seien $\underline{M}$, v und G wie in Satz 4.2.3 und sei die Abbildung $Q_v[G] \to \mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M})$ induziert durch die Aktion von G auf dem Tate-Modul von $\underline{M}$ bei v. Sei F_v das Bild von $Q_v[G]$ in $\mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M})$.
Dann ist $\underline{M}$ halbeinfach, falls F_v halbeinfach ist.

Damit können wir beweisen, dass jedes CM-Anderson A-Motiv halbeinfach ist, wenn die Q-Algebra der komplexen Multiplikation halbeinfach ist.

Satz 4.2.5 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches und kommutatives $E \subseteq \mathrm{QEnd}(\underline{M})$. Dann ist $\underline{M}$ halbeinfach.

Beweis: Nach Voraussetzung ist E halbeinfach. Da nach [BH09, Rem 6.7] Q_v über Q separabel ist, ist E_v nach [Bou58, Ch 8 Cor 7.6/4] halbeinfach. Nach Satz 2.4.1 ist oBdA L endlich erzeugt, wir können also Lemma 4.2.4 anwenden. Dazu werden wir F_v in $E_v := E \otimes_Q Q_v$ einbetten und damit zeigen, dass F_v halbeinfach ist. Dazu benötigen wir jedoch noch einige Eigenschaften der beiden Algebren F_v und E_v.
In $\mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M})$ kommutieren alle Elemente mit dem Bild von $Q_v[G]$ in $\mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M})$. Daraus folgt $F_v \subseteq \left\{ f \in \mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M}) \;\middle|\; fg = gf \text{ für alle } g \in \mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M}) \right\}$. Nach der Tate-Vermutung gilt $E_v := E \otimes_Q Q_v \subseteq \mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M})$. Nehmen wir beide Aussagen zusammen, so folgt

$$F_v \subseteq \left\{ f \in \mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M}) \;\middle|\; fg = gf \text{ für alle } g \in E_v \right\}. \tag{4.2.1}$$

$\mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M})$ ist ein $Q_v[G]$-Modul und ebenso ein F_v-Modul, da $Q_v[G] \to \mathrm{End}_{Q_v}(V_v\underline{M})$ durch F_v faktorisiert. Dadurch gilt

$$E_v \subseteq \mathrm{End}_{F_v}(V_v\underline{M}) = \mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M}). \tag{4.2.2}$$

Nach [TW96, Prop 6.1] ist der Tate-Modul $V_v\underline{M}$ ein Q_v-Vektorraum von Dimension r. Es folgt $E_v \subseteq \mathrm{End}_{Q_v[G]}(V_v\underline{M}) \subseteq M_r(Q_v)$ und wir können [BH09, Lem 7.2] anwenden, da E_v halbeinfach ist, und erhalten

$$E_v \cong Q_v^{\oplus r}.$$

Die Abbildung $E_v \to V_v\underline{M}$, die durch $1 \mapsto x$ gegeben ist, ist somit ein Isomorphismus. Nach Voraussetzung ist E kommutativ und nach [Bou58, Chp 8 Cor de Prop 1.2/3] ist damit auch E_v kommutativ. Dann gilt

$$\mathrm{End}_{E_v}(V_v\underline{M}) \cong \mathrm{End}_{E_v}(E_v) \cong E_v \text{ durch}$$
$$\left(\begin{smallmatrix} x \mapsto f\cdot x \\ g\cdot x = y \mapsto f\cdot y \end{smallmatrix}\right) \leftarrow\!\shortmid \left(\begin{smallmatrix} 1 \mapsto f \\ g \mapsto fg = gf \end{smallmatrix}\right) \leftarrow\!\shortmid f \text{ für } f \in E_v.$$

Nun können wir F_v in E_v einbetten und zeigen, dass $F_v \hookrightarrow E_v$, gegeben durch $\alpha \mapsto f_\alpha$, ein injektiver Q-Algebren-Homomorphismus ist.
Wir wählen dazu ein $\alpha \in F_v$, also einen Endomorphismus $\alpha : V_v\underline{M} \to V_v\underline{M}$, und ein $x \in V_v\underline{M}$. Dann liegt die skalare Multiplikation mit x, $\alpha(x)$, in $V_v\underline{M}$. Wegen $E_v \cong V_v\underline{M}$ existiert ein eindeutiges $f_\alpha \in E_v$ mit $\alpha x \mapsto f_\alpha x$. Damit ist diese Abbildung wohldefiniert.
Nun müssen wir noch zeigen, dass die Abbildung ein Q-Algebren-Homomorphismus ist.
Wir wählen $\alpha = \sum_i n_i\alpha_i \in F_v$ mit $n_i \in Q_v$ und $\alpha_i \in G$. Dann ist $\alpha(x)$ definiert als $\sum_i n_i\alpha_i(x)$. Damit gilt $\alpha(x) = \sum_i n_i f_{\alpha_i} x$ und $\alpha \mapsto \sum_i n_i f_{\alpha_i}$.
Wählen wir nun $\alpha, \beta \in F_v$ und $x \in V_v\underline{M}$ und betrachten die Verknüpfung $\alpha \circ \beta$, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta(x) &= \alpha(f_\beta x) \\ &\overset{(4.2.2)}{=} f_\beta \alpha(x) \\ &= f_\beta f_\alpha x \\ &\overset{E_v\ komm.}{=} f_\alpha f_\beta x. \end{aligned}$$

Also wird $\alpha \circ \beta$ auf $f_\alpha f_\beta$ geschickt.
Nun zeigen wir die Injektivität der Abbildung. Sei $f_\alpha = 1$ in E_v, also $\alpha(x) = x$. Sei $y \in V_v\underline{M}$. Wegen der Isomorphie von E_v und $V_v\underline{M}$ existiert ein eindeutiges $f \in E_v$ mit $y = fx$. Betrachten wir $\alpha(y) = \alpha(fx)$, so können wir f und α wegen (4.2.1) vertauschen. Wir erhalten so $\alpha(y) = f\alpha(x) = fx = y$. Daraus folgt $\alpha = 1$ in F_v.

Nun haben wir F_v in E_v eingebettet und wir müssen nur noch zeigen, dass F_v halbeinfach ist. Da F_v eine endlich dimensionale Q-Unteralgebra von E_v ist, folgt mit [Bou58, Ch 8 Cor de Prop 6.4/9], dass F_v halbeinfach ist.
Nun können wir Lemma 4.2.4 anwenden und erhalten das gewünschte Resultat. □

Wir können die Aussage von Satz 4.2.5 nicht auf einfache CM-Algebren übertragen.

Beispiel 4.2.6 Ein Anderson A-Motiv $\underline{M}$ mit komplexer Multiplikation durch einfaches E ist nicht notwendigerweise einfach.

Beweis: Sei $\underline{\tilde{M}}$ ein CM-Anderson A-Motiv von Rang 1 mit Quasi-Endomorphismenring $\tilde{E} := \mathrm{QEnd}(\underline{\tilde{M}}) := Q$. Setze $\underline{M} := \underline{\tilde{M}}^{\oplus 2}$ als Anderson A-Motiv von Rang 2. Dann ist $\mathrm{QEnd}(\underline{M}) = M_{2\times 2}(\tilde{E})$. Die Algebra $E := \tilde{E}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{smallmatrix}\right) \right)$ hat Dimension 2 über Q, da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Nullstelle von $X^2 - t$ ist. E ist als Körper kommutativ und einfach und somit als Algebra der komplexen Multiplikation geeignet.
Wir haben somit eine einfache Algebra der komplexen Multiplikation gegeben, das Anderson A-Motiv ist jedoch halbeinfach. □

Bemerkung Es ergibt sich die noch ungelöste Frage, ob man zu jedem CM-Anderson A-Motiv eine endliche Körpererweiterung finden kann, so dass das Anderson A-Motiv halbeinfach ist.

4.3 Reinheit

In diesem Abschnitt konstruieren wir ein Anderson A-Motiv, welches komplexe Multiplikation hat, aber nicht rein ist. Dazu werden wir eine zur Reinheit von Anderson A-Motiven äquivalente Aussage in der Theorie der lokalen σ-Isoshtuka angeben, die im Beispiel verletzt wird.

In diesem Abschnitt wollen wir folgende Vereinfachung voraussetzen.

Bemerkung 4.3.1 [Har08, 2.4.3] Es gelte $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_q$. Damit gilt auch $A_{\infty,L} \cong L[[z_\infty]]$ und $Q_{\infty,L} \cong L((z_\infty))$ mit uniformisierendem Parameter z_∞ von $\mathcal{O}_{C,\infty}$.

Zunächst definieren wir jedoch reine Anderson A-Motive über L.

4.3.1 Definition von Reinheit

Definition 4.3.2 (Reinheit) Ein Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über L heißt *rein*, falls ein freier $A_{\infty,L}$-Untermodul $W_M \subseteq M \otimes_{A_L} Q_{\infty,L}$ von Rang $\mathrm{rk}(\underline{M})$ existiert, so dass ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$

derart existiert, dass $\tau_M^{n\cdot \mathrm{rk}(\underline{M})}\left(\sigma^{*n\cdot\mathrm{rk}(\underline{M})}W_M\right) = z_\infty^{-n\cdot\dim(\underline{M})}W_M$ gilt.

Wie auch den Begriff der komplexen Multiplikation, können wir den Begriff der Reinheit auf abelsche Anderson A-Moduln übertragen.

Bemerkung 4.3.3 Ein abelscher Anderson A-Modul heißt *rein*, wenn das zugehörige Anderson A-Motiv rein ist.

Es existieren mehrere zu Reinheit äquivalente Bedingungen an das Anderson A-Motiv oder an das zum Anderson A-Motiv assoziierte lokale Shtuka.

Theorem 4.3.4 [Har08][Th 3.4.15] Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über L, $r := \mathrm{rk}\,\underline{M}$ und $d := \dim \underline{M}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\underline{M}$ ist rein.

b) Es existiert ein $A_{\infty,L}$-Gitter $W_M \subseteq \underline{\widehat{V}}_\infty\underline{M}$ so, dass $z^d\tau^r : (\sigma^*)^r W_M \xrightarrow{\sim} W_M$ ein Isomorphismus auf dem Gitter W_M ist.

c) Es gilt $\underline{\widehat{V}}_\infty\underline{M} \otimes_{Q_{\infty,L}} Q_{\infty,L^{alg}} \cong \underline{\hat{V}}_{m,l}^{\oplus r/l}$. Dabei ist $\underline{\hat{V}}_{m,l}^{\oplus r/l}$ definiert durch das Tupel

$$\underline{\hat{V}}_{m,l}^{\oplus r/l} := \left((Q_{\infty,L^{alg}})^{\oplus l}, \tau = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & z^m \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{\oplus r/l}$$

mit $m, l \in \mathbb{Z}$, $(m,l) = 1$, $l \geq 1$ und Steigung $\frac{m}{l} = -\frac{\dim(\underline{M})}{\mathrm{rk}(\underline{M})}$.

Bemerkung 4.3.5 Reine, halbeinfache Anderson A-Motive zerfallen in reine, einfache Anderson A-Motive, wie man mit Hilfe des Theorems 4.3.4 zeigen kann.

Mit 4.3.4 c) haben wir die zu Reinheit äquivalente Aussage, die wir benötigen, um zu zeigen, dass komplexe Multiplikation Reinheit nicht impliziert.

4.3.2 Ein Gegenbeispiel zur Reinheit

In diesem Abschnitt setzen wir $A = \mathbb{F}_q[t]$ und konstruieren ein Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über dem A-Körper $L = \mathbb{F}_q$. In diesem Fall ist $\gamma : A \to L$ durch $t \mapsto \theta := 0$ definiert mit maximalem Ideal $\varepsilon = \ker(\gamma) = (t)$.
Die Idee ist nun, einen Funktionenkörper E so zu wählen, dass das Anderson A-Motiv

komplexe Multiplikation durch E hat und das zu $\underline{M}$ assozierte lokale σ-Isoshtuka bei ∞ zwei verschiedene Steigungen hat.

Satz 4.3.6 Es existiert ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E, welches nicht rein ist.

Beweis: Sei $A = \mathbb{F}_q[t]$ und $L = \mathbb{F}_q$ mit $\gamma : A \to L$ gegeben durch $\gamma(t) = \theta := 0$.
Setze $E := Q[y]/\,(y(y-1)-z)$ für $z = \frac{1}{t}$ in Q. Wie wir in Beispiel 3.3.4 gesehen haben, ist $E = \mathbb{F}_q(x)$ für $x := \frac{1}{y}$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)]$. Nun können wir das CM-Anderson A-Motiv $\underline{M} = (M = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}, \tau_M = x^2)$ aus Beispiel 3.3.4 betrachten.

Behauptung: $\underline{M}$ ist nicht rein.
Wir betrachten nun das lokale σ-Isoshtuka assoziiert zu $\underline{M}$ bei ∞, um zu zeigen, dass Aussage c) aus Theorem 4.3.4 verletzt ist. $\underline{\widehat{V}_\infty M}$ ist als das Paar $(M \otimes_{A_L} Q_{\infty,L}, \tau_M \otimes 1)$ definiert. Setzen wir die Definition von L und $\underline{M}$ ein, so erhalten wir $\underline{\widehat{V}_\infty M} = (\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_A Q_{\infty,\mathbb{F}_q}, x^2 \otimes 1)$.
Nun können wir ausnutzen, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_A Q = E$ gilt und wir $Q_{\infty,\mathbb{F}_q}$ zu $\mathbb{F}_q((z))$ vereinfacht haben, siehe Bemerkung 4.3.1. Setzen wir dann die Definition von E ein, folgt

$$\underline{\widehat{V}_\infty M} = \left(\mathbb{F}_q(t)[y]/\,(y(y-1)-z) \otimes_{\mathbb{F}_q(t)} \mathbb{F}_q((z)), \frac{1}{y^2} \otimes 1\right).$$

Wir können den Modul weiter umschreiben zu

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_q[z][y]/\,(y(y-1)-z) \otimes_{\mathbb{F}_q[z]} \mathbb{F}_q((z)) &= \left(\mathbb{F}_q[z][y]/\,(y(y-1)-z) \otimes_{\mathbb{F}_q[z]} \mathbb{F}_q[[z]]\right)\left[\frac{1}{z}\right] \\ &= \mathbb{F}_q[[z]][y]/\,(y(y-1)-z)\left[\frac{1}{z}\right].\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das primitive Polynom $y(y-1)-z \in \mathbb{F}_q[[z]][y]$. Dieses ist kongruent zu $y(y-1) \mod z = \overline{g} \circ \overline{h} \mod z$ mit teilerfremden Polynomen $\overline{g} := y$ und $\overline{h} := y-1$. Da $\overline{g}$ und $\overline{h}$ Polynome von Grad 1 sind, können wir das Henselsche Lemma anwenden und erhalten eine Zerlegung von $y(y-1)-z$ in $(y-y_0)$ und $(y-y_1)$ mit $y_0, y_1 \in \mathbb{F}_q[[z]]$. Wenden wir nun den chinesischen Restsatz an, so erhalten wir

$$\mathbb{F}_q[[z]][y]/(y(y-1)-z) \cong \mathbb{F}_q[[z]][y]/(y-y_0) \oplus \mathbb{F}_q[[z]][y]/(y-y_1).$$

Der Modul zerfällt also in die direkte Summe von $\mathbb{F}_q((z))$ mit $y = y_0$ und $\mathbb{F}_q((z))$ mit $y = y_1$. Wir erhalten

$$\underline{\widehat{V}_\infty M} \cong \left(Q_\infty, \tau = \frac{1}{y_0^2}\right) \oplus \left(Q_\infty, \tau = \frac{1}{y_1^2}\right).$$

In $\mathbb{F}_q[[z]][y]/(y(y-1)-z)\left[\frac{1}{z}\right]$ hat $y(y-1) \mod z$ zwei Lösungen und zwar $y = 0$ und $y = 1$. Damit gilt $y_0 \equiv 0 \mod z$ und $y_1 \equiv 1 \mod z$ und somit $\mathrm{ord}_z(y_0) = 1$ und $\mathrm{ord}_z(y_1) = 0$, da $\mathrm{ord}_z(z) = 1$ ist.
Wir können also $\underline{\widehat{V}}_\infty \underline{M} \otimes_{Q_\infty} Q_{\infty,\mathbb{F}_q^{alg}}$ als direkte Summe von $\underline{\widehat{V}}_{-2,1}$ und $\underline{\widehat{V}}_{0,1}$ schreiben.
Das lokale σ-Isoshtuka bei ∞ hat somit zwei verschiedene Steigungen und damit ist $\underline{M}$ nicht rein. $\square$

4.4 Uniformisierbarkeit

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass nicht jeder abelsche Anderson A-Modul mit komplexer Multiplikation uniformisierbar ist. Dazu greifen wir auf ein Beispiel aus [BH07] zurück, welches uns die Menge der uniformisierbaren Anderson A-Motive beschreibt und konstruieren ein Gegenbeispiel.

4.4.1 Definition der Uniformisierbarkeit

Zuerst definieren wir den Begriff der Uniformisierbarkeit für abelsche Anderson A-Moduln und geben äquivalente Formulierungen, sowie Eigenschaften der Exponentialfunktion an. Für den Fall $A = \mathbb{F}_q[t]$ orientieren wir uns an [Gos98, Kapitel 5]. Der Einfachheit halber betrachten wir Anderson A-Motive über $\mathbb{C}_\infty$. Für allgemeinere Resultate siehe [BH07, Chp 8].

Die Uniformisierbarkeit wird mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert, die für jeden abelschen Anderson A-Modul existiert.

Definition 4.4.1 (Exponentialfunktion) [Gos98, Thm 5.9.6] Die *Exponentialfunktion* eines abelschen Anderson A-Moduls (G, φ) über $\mathbb{C}_\infty$ ist eine ganze, rigid-analytische Funktion $\exp_G : \mathrm{T}_0\, G \to G(\mathbb{C}_\infty)$ derart, dass

$$\exp_G\left(\mathrm{T}_0(\varphi_a)z\right) = \varphi_a\left(\exp_G(z)\right)$$

für alle $z \in \mathrm{T}_0\, G$ und für alle $a \in A$ gilt.
Den Kern der Exponentialfunktion bezeichnen wir mit $\Lambda := \ker(\exp_G) \subset \mathrm{T}_0\, G = \mathbb{C}_\infty^{\oplus d}$. Er ist als lokal freier A-Modul ein Gitter in $\mathrm{T}_0\, G$.

Folgende Eigenschaft der Exponentialfunktion werden wir brauchen, um die Algebraizität in Kapitel 5 zu zeigen.

Bemerkung 4.4.2 [Gos98, S.162ff]

a) Es gilt $\exp_G \circ \mathrm{T}_0 f = f \circ \exp_G$ für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G, \varphi)$.

b) Die Exponentialfunktion ist lokal umkehrbar.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können wir den Begriff der Uniformisierbarkeit einführen.

Definition 4.4.3 (Uniformisierbarkeit) [Gos98] Ein abelscher Anderson A-Modul (G, φ) über $\mathbb{C}_\infty$, heißt *uniformisierbar*, falls die Exponentialfunktion von $\underline{G}$ surjektiv ist. Dann gilt insbesondere $G(\mathbb{C}_\infty) \cong \mathrm{T}_0\, G/\Lambda$.

Da abelsche Anderson A-Moduln über perfekten Körpern zu Anderson A-Motiven antiäquivalent sind, können wir Uniformisierbarkeit auch für Anderson A-Motive definieren.

Bemerkung 4.4.4 Ein Anderson A-Motiv über einem perfekten Körper L heißt *uniformisierbar*, falls der assoziierte abelsche Anderson A-Modul uniformisierbar ist.

Es existieren mehrere zu Uniformisierbarkeit äquivalente Aussagen.

Lemma 4.4.5 [Gos98, Th 5.9.14] Für einen abelschen Anderson A-Modul (G, φ) über L sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Der abelsche Anderson A-Modul (G, φ) ist uniformisierbar.

b) Als lokal freier A-Modul ist Λ von Rang $\mathrm{rk}_{A_L}\left(\underline{M}(G)\right)$.

Der Tangentialraum eines reinen, uniformisierbaren abelschen Anderson A-Moduls über $\mathbb{C}_\infty$ wird vom Kern der Exponentialfunktion als $\mathbb{C}_\infty$-Modul erzeugt.

Lemma 4.4.6 [Gos98, Th 5.11.7] Sei (G,φ) ein reiner, uniformisierbarer abelscher Anderson A-Modul über $\mathbb{C}_\infty$. Dann gilt

$$\mathrm{T}_0\, G = < \Lambda >_{\mathbb{C}_\infty},$$

$\mathrm{T}_0\, G$ wird also von Λ als $\mathbb{C}_\infty$-Modul erzeugt.

4.4.2 Uniformisierbare abelsche Anderson A-Moduln

Wir zeigen, dass ein uniformisierbares, einfaches CM-Anderson A-Motiv komplexe Multiplikation durch den Schiefkörper $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ hat. Danach geben wir ein Beispiel von uniformisierbaren 2-dimensionalen Anderson A-Motiven von Rang 2 an.

Satz 4.4.7 Sei L ein perfekter A-Körper und sei $\underline{M}$ ein uniformisierbares, einfaches Anderson A-Motiv über L. Dann ist die Dimension von $Q\,\mathrm{End}(\underline{M})$ über Q kleiner gleich dem Rang des Anderson A-Motivs $\underline{M}$.

Beweis: Da $\underline{M}$ einfach ist, folgt mit Satz 4.2.2.a), dass $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ ein Schiefkörper über Q ist. Damit ist der $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$-Modul $Q \otimes_A \Lambda$ sogar ein $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$-Vektorraum. Da aus der Uniformisierbarkeit folgt, dass $\Lambda \neq 0$ ist, hat der Vektorraum die Dimension $\dim_{\mathrm{QEnd}(\underline{M})} Q \otimes_A \Lambda \geq 1$. Wir können also folgern, dass gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\underline{M}) &= \dim_Q Q \otimes_A \Lambda \\ &= [\mathrm{QEnd}(\underline{M}) : Q] \cdot \dim_{\mathrm{QEnd}(\underline{M})} Q \otimes_A \Lambda \\ &\geq [\mathrm{QEnd}(\underline{M}) : Q].\end{aligned}$$

□

Korollar 4.4.8 Sei L ein perfekter A-Körper. Für ein CM-Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über L, welches uniformisierbar und einfach ist, gilt, dass es komplexe Multiplikation durch den Körper $E = \mathrm{QEnd}(\underline{M})$ hat.

Beweis: Aus der komplexen Multiplikation folgt, dass in $\mathrm{QEnd}(\underline{M})$ eine halbeinfache, kommutative CM-Algebra E existiert mit $[E : Q] = \mathrm{rk}(\underline{M})$. Nach Satz 4.4.7 gilt aber $[E : Q] \geq \dim_Q \mathrm{QEnd}(\underline{M})$ und damit ist der Schiefkörper $\mathrm{QEnd}(\underline{M}) = E$ kommutativ. □

Die folgende Aussage brauchen wir zum Beispiel in Kapitel 5, um den CM-Typ eines Anderson A-Motivs zu definieren.

Satz 4.4.9 Sei (G, φ) ein uniformisierbarer, reiner abelscher Anderson A-Modul über $\mathbb{C}_\infty$ mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E mit $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subseteq \mathrm{End}_L(\underline{M})$. Dann ist $\Lambda \otimes_A Q$ ist ein freier E-Modul von Rang 1.

Beweis: Wir zeigen, dass die Abbildung $\mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G,\varphi) \times \Lambda \to \Lambda$, die (f,λ) für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G,\varphi)$ und $\lambda \in \Lambda$ auf $\mathrm{T}_0\, f(\lambda)$ schickt, wohldefiniert ist. Das ist der Fall, da $\exp_G(\mathrm{T}_0\, f)(\lambda) = f(\exp_G(\lambda)) = f(0) = 0$ gilt und somit $\mathrm{T}_0\, f(\lambda) \in \Lambda$ liegt. Also ist Λ ein $\mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty}(G,\varphi)$-Modul.
Damit ist $\Lambda \otimes_A Q$ ein $\mathrm{QEnd}(G,\varphi)$-Modul und wegen $E \subseteq \mathrm{QEnd}(G,\varphi)$ ist $\Lambda \otimes_A Q$ ein E-Modul.
Um mit [BH09, Lem 7.2] folgern zu können, dass $Q.\Lambda := \Lambda \otimes_A Q$ ein freier E-Modul von Rang 1 ist, brauchen wir eine Injektion $E \hookrightarrow \mathrm{End}_Q(\Lambda \otimes_A Q)$.
Wir betrachten ein Element f aus dem Kern der Abbildung. Da E der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ist, können wir oBdA $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ wählen, das heißt

$$f \mapsto \mathrm{T}_0\, f|_{\Lambda \otimes_A Q} \equiv 0.$$

Insbesondere ist $\mathrm{T}_0\, f(\Lambda) = \{0\}$ und nach Lemma 4.4.6 wird $\mathrm{T}_0\, G$ von Λ erzeugt. Daher gilt $\mathrm{T}_0\, f(x) = 0$ für alle $x \in \mathrm{T}_0\, G$. Wir können nun die definierende Eigenschaft der Exponentialfunktion ausnutzen:

$$\begin{aligned} f(\exp_{\mathrm{G}}(x)) &= \exp_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0\, f(x)) \\ &= \exp_{\mathrm{G}}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion surjektiv ist, folgt $f(y) = 0$ für alle $y \in G(\mathbb{C}_\infty)$. Damit ist f die Nullabbildung und $E \to \mathrm{End}_Q(\Lambda \otimes_A Q)$ injektiv. □

Wir geben nun ein Beispiel zur Uniformisierbarkeit eines Anderson A-Motivs von Rang und Dimension 2 unter der Voraussetzung $A = \mathbb{F}_q[t]$ an.

Beispiel 4.4.10 [BH07, Prop 7.1] Sei $\zeta \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ mit $|\zeta| < 1$, $X := \mathrm{Spec}\, R$ mit $R := \mathbb{C}_\infty[a,b,c,d]/(a+d+2\zeta, ad-bc-\zeta^2)$ und seien $\Delta_1 := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\Delta := \mathrm{Id} + t \cdot \Delta_1$. Dann gilt $\det \Delta = (1-\zeta t)^2$.
Für die Familie von Anderson A-Motiven $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{O}_{C_X}^{\oplus 2}, \tau = \Delta \cdot \sigma)$ gilt

$$\left\{ y \text{ max Ideal von } R \;\middle|\; y^*\underline{\mathcal{F}} \text{ uniformisierbar} \right\} = \bigcup_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} g \left\{ y \text{ max Ideal von R} \;\middle|\; |a(y)|, |c(y)|, |d(y)| < 1 \right\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ definiert durch $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times X \to X,\ (g, \Delta) \mapsto g\Delta g^{-1}$ eine Aktion auf X. Dadurch wird ein Isomorphismus $g^*\underline{\mathcal{F}} \cong \underline{\mathcal{F}}$ für alle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ induziert, der durch $g^*\mathcal{F}(y) \cong \mathcal{F}(g(y))$ gegeben ist.

4.4.3 Ein Gegenbeispiel zur Uniformisierbarkeit

Nun konstruieren wir ein Anderson A-Motiv über $\mathbb{C}_\infty$ mit komplexer Multiplikation, welches nicht uniformisierbar ist. Wir wählen dazu $A = \mathbb{F}_q[t]$.

Da wir im Gegenbeispiel nur ein maximales Ideal y untersuchen müssen, um zu zeigen, dass $y^*\underline{M}$ nicht uniformisierbar ist, können wir a für $a(y) \equiv a \mod y$ in $\kappa(y) = R/\mathfrak{m}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ in R schreiben und dies analog auch für b,c und d tun.

Satz 4.4.11 Es existiert ein Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, welches nicht uniformisierbar ist.

Beweis: Sei $A = \mathbb{F}_q[t]$, $L = \mathbb{C}_\infty$ und sei $\gamma : A \to \mathbb{C}_\infty$ durch $t \mapsto \zeta^{-1}$ für ein $\zeta \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ mit $|\zeta| < 1$ gegeben. Wir wählen $\eta \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ mit $|\eta| < 1$ und $\eta(\eta - 1) = \zeta$.
Sei wie in Beispiel 3.3.4 die Q-Algebra E gegeben durch $Q[y]/\,(y(y-1) - z)$ für $z := \frac{1}{t}$ in Q. Mit $x := \frac{1}{y}$ ist $E = \mathbb{F}_q(x)$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathbb{F}_q[x][x^2/(x-1)]$ der Ganzheitsring von E.
Wir definieren das Anderson A-Motiv $\underline{M} = (M, \tau_M)$ durch $M := \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \otimes_{\mathbb{F}_q} L$ und $\tau_M := (1 - \eta x)^2/(1-x)$.

<u>Behauptung:</u> $\underline{M}$ ist ein CM-Anderson A-Motiv von Rang und Dimension 2.
M ist ein freier Modul vom Rang 1 über $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ und damit insbesondere ein A_L-Modul. Somit gilt auch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subseteq \mathrm{End}(\underline{M})$, also hat $\underline{M}$ komplexe Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$.
Da $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \cong A \oplus Ax$, können wir die Basis $(1, x)$ wählen und τ_M bezüglich dieser Basis darstellen. Mit Hilfe von Gleichung (3.3.1) schreiben wir τ_M als Polynom in x und t.

$$\begin{aligned}
\tau_M &\overset{(3.3.1)}{=} (1 - 2\eta x + \eta^2 x^2)(1 + x + t) \\
&= 1 + (1-2\eta)x + t - 2\eta(x^2 + xt) + (1 + x + t)\eta^2 x^2 \\
&\overset{x^2 = t - xt}{=} 1 + (1-2\eta)x + (1-\eta)^2 t
\end{aligned}$$

Die Darstellung bezüglich x sieht dann wie folgt aus:

$$\tau_M \cdot x = (1 + \eta^2 t)x + (1-2\eta)tx + (1-2\eta)x^2 \overset{x^2 = t - tx}{=} (1 + \eta^2 t)x + (1-2\eta)t$$

Damit ist τ_M durch die Matrix

$$\tau_M = \begin{pmatrix} 1 + (1-\eta)^2 t & (1-2\eta)t \\ 1-2\eta & 1+\eta^2 t \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen wir nun die Determinante

$$\begin{aligned} \det \tau_M &= (1 + (1-\eta)^2 t)(1+\eta^2 t) - ((1-2\eta)^2 t) \\ &= 1 + 2\eta^2 t + 2\eta t - 4\eta^2 t + \eta^2 t + t^2(\eta^2 - 2\eta^3 + \eta^4) \\ &= 1 + 2t(\eta - \eta^2) + (\eta^2 - \eta)^2 t^2 \\ &= 1 - 2(\eta(\eta-1))t + (\eta(\eta-1))^2 t^2, \end{aligned}$$

so erhalten wir mit $\zeta = \eta(\eta - 1)$

$$\det \tau_M = (1 - \zeta t)^2.$$

Aus Beispiel 2.3.3 folgt, dass $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv ist. $\square_{Beh}$

Um Beispiel 4.4.10 anwenden zu können, müssen wir τ_M in die Form $\tau' = \mathrm{Id} + t\Delta_1$ bringen. Wir erreichen das, indem wir τ' als $U^{-1} \cdot \tau_M \cdot \sigma(U)$ setzen, mit $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$, wobei $s \in \mathbb{C}_\infty$ mit $s^q - s + (1-2\eta) = 0$ gilt. Daraus folgt $|s| = 1$.
Das ergibt für τ':

$$\begin{aligned} \tau' = U^{-1} \cdot \tau_M \cdot \sigma U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + (1-\eta)^2 t & (1-2\eta)t \\ 1-2\eta & 1+\eta^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (1-\eta)^2 t & (1-2\eta)t \\ -s - (1-\eta)^2 st + 1 - 2\eta & 1 + ((-1+2\eta)s + \eta^2)t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^q & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + t((1-\eta)^2 + (1-2\eta)s^q) & (1-2\eta)t \\ -(1-\eta)^2 st + 1 - 2\eta - s + s^q + ((2\eta-1)s + \eta^2)s^q t & 1 + ((-1+2\eta)s + \eta^2)t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also können wir τ' in der gewünschten Form $\tau' = \mathrm{Id} + t\Delta_1$ mit

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2\eta + \eta^2 + (1-2\eta)s^q & 1-2\eta \\ s(-1 + 2\eta - \eta^2 - s^q + 2\eta s^q) + \eta^2 s^q & (-1+2\eta)s + \eta^2 \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Matrix $\Delta_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ können wir mit $s^q - s + (1-2\eta) = 0$ vereinfachen und erhalten

$$\begin{aligned}
a &= (1-2\eta)(1+s^q)+\eta^2 &&= (1-2\eta)s+2\eta-3\eta^2\\
b &= 1-2\eta\\
c &= -s(1-2\eta)(1+s^q)-\eta^2(s-s^q) &&= (-1)(1-2\eta)(s+\eta)^2\\
d &= (2\eta-1)s+\eta^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} (1-2\eta)s+2\eta-3\eta^2 & 1-2\eta \\ (-1)(1-2\eta)(s+\eta)^2 & (2\eta-1)s+\eta^2 \end{pmatrix}.$$

<u>Behauptung:</u> $\underline{M}$ ist nicht uniformisierbar.
Wir wollen nun Beispiel 4.4.10 ausnutzen und zeigen, dass $\Delta' :\equiv \Delta_1 \mod \{|\,.\,| < 1\}$ unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ nicht zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ konjugiert ist.
Dazu berechnen wir zunächst die Beträge von a, b, c und d, um Δ' zu bestimmen. Wegen $|\eta| < 1$ und $|s| = 1$ gilt $|\eta| < |s|$ und damit:

$$\begin{aligned}
|a| &= |s-2\eta s+2\eta-3\eta^3| &&= |s|\\
|b| &= |1-2\eta| &&= 1\\
|c| &= |(-1)(1-2\eta)(s+\eta)^2| &&= |-s^2|\\
|d| &= |2s\eta-s+\eta^2| &&= |-s|
\end{aligned}$$

Also ist

$$\Delta' :\equiv \Delta_1 \mod \{|\,.\,| < 1\} \equiv \begin{pmatrix} s & 1 \\ -s^2 & -s \end{pmatrix}.$$

Angenommen Δ' sei konjugiert zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ und sei $g = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Dann wenden wir die in Beispiel 4.4.10 definierte Aktion von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ auf X an, also $(g,\Delta') \mapsto g\Delta' g^{-1}$. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 1 \\ -s^2 & -s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ux-vw} \begin{pmatrix} x & -v \\ -w & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{1}{ux-vw} \begin{pmatrix} uxs-vxs^2-uw+vws & -uvs+v^2s^2+u^2-uvs \\ wxs-x^2s^2-w^2+wxs & -w^2s+wxs^2+uw-uxs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $u, v \in \mathbb{F}_q$ gilt, folgt wegen $uxs - vxs^2 - uw + vws = 0$ und damit $u(xs - w) = v(xs^2 - ws)$, dass $s \equiv \frac{u}{v} \mod \{|\,.\,| < 1\}$ in $\mathbb{F}_q + \{|\,.\,| < 1\}$ liegt. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass wegen $s^q - s + (1 - 2\eta) = 0$ gilt: $s \notin \mathbb{F}_q + \{|\,.\,| < 1\}$. ↯

Damit ist Δ' nicht konjugiert zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ und $\underline{M}$ nach Beispiel 4.4.10 nicht uniformisierbar. $\square$

5 Klassifikation von Anderson A-Motiven

In diesem Kapitel klassifizieren wir Anderson A-Motive über $\mathbb{C}_\infty$ bis auf Isogenie beziehungsweise Isomorphie. Wir beschränken uns dabei auf die uniformisierbaren, reinen, halbeinfachen Anderson A-Motive mit komplexer Multiplikation und auf die Situation $A = \mathbb{F}_q[t]$.
Wir zeigen, dass zwei verschiedene Anderson A-Motive mit isomorphen CM-Typen in einer Isogenieklasse liegen und dass isogene Anderson A-Motive von isomorphem CM-Typ sind. Dazu definieren wir den CM-Typ als Paar $(E, \mathfrak{q})$, wobei E eine halbeinfache, kommutative Q-Algebra und $\mathfrak{q} \subseteq E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$ ein $E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$-Untermodul von Rang $\dim_Q E$ ist.
Die vollständige Klassifikation der Anderson A-Motive scheitert daran, dass wir nicht jedem CM-Typ ein Anderson A-Motiv zuordnen können. Im Gegensatz zu den abelschen Varietäten besitzt nicht jeder Quotient $\mathbb{C}_\infty^d / \ker(\exp)$ die Struktur eines Anderson A-Motivs. Wir erhalten allerdings eine Injektion von der Menge der Isogenieklassen von Anderson A-Motiven in die Menge der Isomorphieklassen des CM-Typs.
Betrachten wir die Menge der Isomorphieklassen von Anderson A-Motiven, so müssen wir, um eine ähnliche Injektion zu erhalten, den CM-Typ um eine zusätzliche Information erweitern. Schränken wir die Exponentialfunktion des Anderson A-Motivs auf $Q \otimes_A \ker(\exp)$ ein, so können wir den Kern der Abbildung $E \to Q \otimes_A \ker(\exp) \to G_{tors}(\mathbb{C}_\infty)$ als das Gitter $\mathfrak{a}$ definieren. Nehmen wir nun dieses Gitter zu dem CM-Typ hinzu, so können wir zeigen, dass, falls die zu $\underline{M}$ und $\underline{M}'$ gehörenden Tripel $(E, \mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ und $(E', \mathfrak{q}', \mathfrak{a}')$ isomorph sind, auch $\underline{M}$ und $\underline{M}'$ isomorph sind.

5.1 Der CM-Typ

Um den CM-Typ definieren zu können, müssen wir zunächst zeigen, dass ein $z \in Q$ existiert, so dass $z - \gamma(z)$ das Ideal $J := \big(a \otimes 1 - 1 \otimes \gamma(a) \mid a \in A\big)$ in $A_{\mathbb{C}_\infty}$ erzeugt. Denn dann können wir über dem Ring $\mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$ arbeiten.
Die Abbildung $A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $a \otimes b \mapsto \gamma(a)b$, als deren Kern das Ideal J definiert ist, induziert die Abbildung $\operatorname{Spec} \mathbb{C}_\infty \to \operatorname{Spec}(A \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{C}_\infty) \subseteq C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} \mathbb{C}_\infty =: C_{\mathbb{C}_\infty}$. Für einen uniformisierenden Parameter w des diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}$ können wir die Vervollständigung schreiben als $\widehat{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}} = \mathbb{C}_\infty[[w]]$.
Nun zeigen wir, dass wir als uniformisierenden Parameter von $\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}$ die Differenz $z - \zeta$ wählen können, wobei z der uniformisierende Parameter von Q bei ∞ ist und $\zeta := \gamma(z)$ das Bild von z unter dem $\mathbb{F}_q$-Homomorphismus γ ist.

Lemma 5.1.1 Sei z der uniformisierende Parameter von Q bei ∞ und ζ das Bild von z unter $\gamma : A \to \mathbb{C}_\infty$. Dann ist die Differenz $z - \zeta$ ein uniformisierender Parameter von $\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}$.
Insbesondere gilt $\widehat{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}} = \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$.

Beweis: Da die Differenz $z - \zeta$ in J liegt, gilt $\mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \subseteq \mathbb{C}_\infty[[w]]$. Die Gleichheit $\mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] = \mathbb{C}_\infty[[w]]$ gilt, wenn wir wissen, dass $z - \zeta$ das Ideal erzeugt.
Sei dazu $a \in Q$ ganz über dem Polynomring $\mathbb{F}_q[z]$. Wir betrachten das Minimalpolynom $F(a,z) := \operatorname{mipo}_{a/\mathbb{F}_q(z)}$ von a über $\mathbb{F}_q(z)$. Da z der uniformisierende Parameter von Q bei ∞ ist, also ∞ unverzweigt in dieser Körpererweiterung ist, gilt, dass Q eine separable Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q(z)$ ist.
Wir betrachten nun $F(a,z)$ als Polynom in zwei Variablen über $\mathbb{C}_\infty$ und berechnen in $\mathbb{C}_\infty[[w]]$ die Taylorentwicklung von F nach (a,z) im Punkt (α,ζ) mit $\alpha := \gamma(a)$. Da $F(a,z)$ ein Polynom ist, bricht diese Taylorentwicklung nach endlich vielen Summanden ab und es gilt somit

$$F(a,z) \equiv F(\alpha,\zeta) + \frac{\partial F}{\partial a}(\alpha,\zeta) \cdot (a-\alpha) + \frac{\partial F}{\partial z}(\alpha,\zeta) \cdot (z-\zeta) \mod J^2.$$

Da $F(a,z) = 0$ und γ ein $\mathbb{F}_q$-Homomomorphismus ist, gilt auch $F(\alpha,\zeta) = 0$ und da wegen der Separabilität von Q über $\mathbb{F}_q(z)$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha,\zeta) \neq 0$ gilt, folgt $a - \gamma(a) \in (z-\zeta) \cdot \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]/J^2$. Es gilt also, dass die Differenz $z - \zeta \neq 0$ in J liegt und damit $z - \zeta/(z-\zeta)^2 \neq 0$. Somit erzeugt $z - \zeta$ das maximale Ideal und ist somit ein

uniformisierender Parameter.
Insbesondere gilt $\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_{\mathbb{C}_\infty},V(J)}} = \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$. □

Damit können wir nun den CM-Typ definieren.

Definition 5.1.2 (CM-Typ) Ein Paar $(E, \mathfrak{q})$, bestehend aus einer halbeinfachen, kommutativen Q-Algebra E der Dimension $r \in \mathbb{N}$ und einem endlich erzeugten Untermodul $\mathfrak{q} \subseteq E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$ von Rang r, heißt *CM-Typ*.
Zwei CM-Typen $(E, \mathfrak{q})$ und $(E', \mathfrak{q}')$ heißen *isomorph*, falls eine Abbildung $f : (E, \mathfrak{q}) \to (E', \mathfrak{q}')$ existiert, die ein Isomorphismus der Q-Algebren ist und den Untermodul $\mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{q}'$ abbildet.

Bevor wir den CM-Typ eines abelschen Anderson A-Moduls definieren, beweisen wir die Existenz eines Isomorphismus zwischen den CM-Algebren zweier isogener abelscher Anderson A-Moduln über $\mathbb{C}_\infty$. Dazu definieren wir für einen reinen, uniformisierbaren abelschen Anderson A-Modul (G, φ) mit komplexer Multiplikation durch halbeinfaches E die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta : E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] &\to \mathrm{T}_0\, G \\ g \otimes \sum_i b_i (z-\zeta)^i &\mapsto \sum_i b_i (\mathrm{T}_0\, \varphi_z - \zeta)^i\, \mathrm{T}_0\, g(\lambda). \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Dabei sei λ eine E-Basis von $Q.\Lambda$ wie in Satz 4.4.9 und $\mathrm{T}_0\, \varphi_z$ für den uniformisierenden Parameter $z = \frac{a}{b} \in Q$ definiert als $(\mathrm{T}_0\, \varphi(b))^{-1}\, \mathrm{T}_0\, \varphi(a)$.
Die Abbildung δ ist wohldefiniert, da definitionsgemäß $(\mathrm{T}_0\, \varphi_z - \zeta)^d = 0$ auf $\mathrm{T}_0\, G$ gilt und nach Satz 4.4.9 ein Isomorphismus zwischen E und $Q.\Lambda$ existiert, der $g \in E$ auf $\mathrm{T}_0\, g(\lambda) \in \mathrm{T}_0\, G$ schickt.
Nach Lemma 4.4.6 wissen wir, dass der Tangentialraum von G durch Λ als $\mathbb{C}_\infty\left[\mathrm{T}_0\, \varphi_a \mid a \in A\right]$-Modul erzeugt wird. Also ist δ surjektiv.

Satz 5.1.3 Seien $\underline{G}_1$ und $\underline{G}_2$ reine, uniformisierbare, halbeinfache CM abelsche Anderson A-Moduln über $\mathbb{C}_\infty$ mit CM-Algebren E_1 beziehungsweise E_2 und sei $f : \underline{G}_1 \to \underline{G}_2$ eine Isogenie. Sei δ_i für $i = 1, 2$ jeweils definiert wie in (5.1.1). Dann existiert ein Isomorphismus $\tilde{f}$ zwischen den CM-Algebren mit $\tilde{f}(\ker(\delta_1)) = \ker(\delta_2)$.

Beweis: Da wir uns in generischer Charakteristik befinden, ist f separabel und induziert einen Isomorphismus der Tangentialräume $\mathrm{T}_0 f : \mathrm{T}_0\, G_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_0\, G_2$ ([Har08, 2.4.10]). Es

gilt $\mathrm{T}_0 f(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$, da jedes Λ_i als Kern der Exponentialfunktion von G_i ein Gitter ist. Wir können also zu jedem $\lambda_1 \in \Lambda_1$ ein $\lambda_2 \in \Lambda_2$ so wählen, dass $\lambda_1 = \mathrm{T}_0 f^{-1}(\lambda_2)$ gilt, wobei $\mathrm{T}_0 f^{-1}$ die Umkehrfunktion von $\mathrm{T}_0 f$ ist.
Nach Satz 4.4.9 existiert ein Isomorphismus $\alpha_i : E_i \xrightarrow{\sim} Q \otimes_A \Lambda_i$. Für eine Basis λ_1 von $Q \otimes_A \Lambda_1$ mit $E_1\lambda_1 \cong Q \otimes_A \Lambda_1$ definieren wir α_1 durch $g \mapsto \mathrm{T}_0\, g(\lambda_1)$ und erhalten so folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_0\, g(\lambda_1) \\
g \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \otimes_A \Lambda_1 \arrow[r, "\sim\, \mathrm{T}_0 f"] & Q \otimes_A \Lambda_2 \\
E_1 \arrow[u, "\alpha_1", "\sim"'] \arrow[r, dashed] & E_2 \arrow[u, "\alpha_2", "\sim"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_0 f(\mathrm{T}_0\, g(\lambda_1)) = \mathrm{T}_0 f(\mathrm{T}_0\, g((\mathrm{T}_0 f)^{-1}(\lambda_2))) \arrow[d, mapsto] \\
\alpha_2^{-1} \circ \mathrm{T}_0 f \circ \alpha_1(g)
\end{tikzcd}
$$

Ein Element $g \in E_1$ wird durch α_1 auf $\mathrm{T}_0\, g(\lambda_1)$ geschickt. Mit Hilfe des Isomorphismus der Tangentialräume wird es auf $\mathrm{T}_0 f(\mathrm{T}_0\, g(\lambda_1)) = \mathrm{T}_0 f(\mathrm{T}_0\, g(\mathrm{T}_0 f^{-1}(\lambda_2)))$ geschickt. Wenden wir nun α_2^{-1} an, so erhalten wir ein Element in E_2. Somit existiert ein Isomorphismus $\tilde{f} := \alpha_2^{-1} \circ \mathrm{T}_0 f \circ \alpha_1$ zwischen E_1 und E_2.
Betrachten wir nun die Abbildungen δ_i aus (5.1.1) für $i = 1, 2$, so erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \delta_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sim"] & E_1 \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\sim"', "\tilde{f} \otimes \mathrm{id}"] & \mathrm{T}_0\, G_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}_0 f"', "\sim"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \delta_2 \arrow[r] & E_2 \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \arrow[r, "\delta_2"] & \mathrm{T}_0\, G_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Daraus folgt der gewünschte Isomorphismus der Kerne. □

Nun können wir uns der Definition eines CM-Typs eines abelschen Anderson A-Moduls zuwenden. Sei dazu (G, φ) ein reiner, uniformisierbarer, halbeinfacher, CM abelscher Anderson A-Modul über $\mathbb{C}_\infty$ von Dimension d und Rang r. Den zu (G, φ) gehörenden CM-Typ bestimmen wir wie folgt:
Als gewünschte kommutative Q-Algebra des CM-Typs wählen wir eine Algebra der komplexen Multiplikation, die wir nach Satz 4.2.2 halbeinfach wählen können, da der abelsche Anderson A-Modul nach Voraussetzung halbeinfach ist.
Durch die Uniformisierbarkeit des abelschen Anderson A-Moduls erhalten wir die Surjektivität der Expontentialfunktion $\exp_{\mathrm{G}}$ und setzen ihren Kern als $\Lambda := \ker(\exp_{\mathrm{G}})$. Nun können wir die folgende Abbildung definieren, die wie (5.1.1) wohldefiniert und

surjektiv ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\tilde{\delta}) & \longrightarrow & \Lambda \otimes_A \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & \mathrm{T}_0\, G & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \lambda \otimes \sum_i b_i (z-\zeta)^i & \mapsto & \sum_i b_i (\mathrm{T}_0\, \varphi_z - \zeta)^i \lambda & & \end{array} \tag{5.1.2}$$

Da nach Satz 4.4.9 eine Bijektion

$$\alpha : E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_A \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \tag{5.1.3}$$

existiert, können wir $\tilde{\delta}$ und α zu einer Surjektion verknüpfen. Da wegen der Uniformisierbarkeit Λ ein A-Modul von Rang r ist, folgt, dass $\ker(\tilde{\delta} \circ \alpha)$ ein $E \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]]$-Untermodul von Rang r ist.
Setzen wir $\mathfrak{q}$ als Kern der Abbildung $\delta := \tilde{\delta} \circ \alpha$, so ist auch die zweite Bedingung des CM-Typs erfüllt.

Wir haben somit gezeigt, dass jedes reine, uniformisierbare, halbeinfache abelsche Anderson A-Modul mit komplexer Multiplikation einen CM-Typ besitzt.

Definition 5.1.4 (CM-Typ eines abelschen Anderson A-Moduls) Mit den voran gegangenen Bezeichnungen definieren wir den CM-Typ eines reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM abelschen Anderson A-Moduls (G, φ) als das Paar $(E, \mathfrak{q})$ mit der halbeinfachen CM-Algebra E und $\mathfrak{q} = \ker(\tilde{\delta} \circ \alpha)$ für $\tilde{\delta}$ aus (5.1.2) und α aus (5.1.3).

Nun müssen wir noch zeigen, dass der CM-Typ wohldefiniert ist und nicht von den Wahlen von E und $\mathfrak{q}$ abhängt.

Korollar 5.1.5 Der CM-Typ eines reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren abelschen Anderson A-Moduls hängt, bis auf Isomorphie, weder von der Wahl von E, noch von der Wahl von α ab.

Beweis: In Satz 5.1.3 haben wir gezeigt, dass die CM-Typen isogener abelscher Anderson A-Moduln isomorph sind. Da die Wahl von E und α den abelschen Anderson A-Modul nicht verändert, ist dieser insbesondere isogen zu sich selbst. Also sind die CM-Typen isomorph. Damit ist der CM-Typ, bis auf Isomorphie, eindeutig bestimmt und wohldefiniert. $\square$

5.2 Klassifikation bis auf Isogenie

Wir haben im voran gegangenen Abschnitt gesehen, dass isogene abelsche Anderson A-Moduln isomorphen CM-Typ haben. Um die abelschen Anderson A-Moduln zu klassifizieren, müssen wir noch zeigen, dass isomorphe CM-Typen zu isogenen abelschen Anderson A-Moduln gehören.

Satz 5.2.1 Zu zwei reinen, uniformisierbaren, halbeinfachen, CM abelschen Anderson A-Moduln über $\mathbb{C}_\infty$ mit isomorphen CM-Typen existiert ein Isomorphismus der Tangentialräume f_0 mit $f_0(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$ derart, dass eine Isogenie $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_\infty}\big(G_1(\mathbb{C}_\infty), G_2(\mathbb{C}_\infty)\big)$ mit $f_0 = \mathrm{T}_0\, f$ existiert.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda_1 \arrow[r] & \mathrm{T}_0\, G_1 \arrow[r, "\exp_{G_1}"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & G_1(\mathbb{C}_\infty) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda_2 \arrow[r] & \mathrm{T}_0\, G_2 \arrow[r, "\exp_{G_2}"] & G_2(\mathbb{C}_\infty) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.2.1}$$

Insbesondere ist f endlich und surjektiv, falls f_0 bijektiv ist.

Beweis: Seien $\underline{G}_1$ und $\underline{G}_2$ zwei solcher abelscher Anderson A-Moduln mit komplexer Multiplikation durch E_1 beziehungsweise E_2. Dann erhalten wir per Definition der Isomorphie von CM-Typen folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha_1"', "\sim"] & E_2 \arrow[d, "\alpha_2"', "\sim"] \\ \Lambda_1 \subseteq & Q \otimes_A \Lambda_1 \arrow[r, dashed, "f_0"] & Q \otimes_A \Lambda_2 \end{tikzcd}$$

Nach Multiplikation mit einem geeigneten $a \in A$ gilt $f_0(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$, da Λ_1 und Λ_2 Gitter sind.

Betrachten wir die exakten Sequenzen, die aus der exakten Sequenz 5.1.2 durch Verknüpfung mit den α_i entsteht, so erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{q}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & E_1 \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{T}_0\, G_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{q}_2 \arrow[r] & E_2 \otimes_Q \mathbb{C}_\infty[[z-\zeta]] \arrow[r, "\delta_2"] & \mathrm{T}_0\, G_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da $\mathfrak{q}_1$ beziehungsweise $\mathfrak{q}_2$ der Kern der Abbildung δ_1 beziehungsweise δ_2 ist, erhalten wir die gewünschte Isomorphie der Tangentialräume.
Nach Definition der abelschen Anderson A-Moduln $\underline{G_i}$ existiert ein Ringhomomorphismus $\varphi_i : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}_\infty,\mathbb{F}_q}(G_i)$ definiert durch $a \mapsto \varphi_{i,a}$ mit $(\mathrm{T}_0\,\varphi_{i,a} - \gamma(a))^d = 0$ auf $\mathrm{T}_0\,G_i$. Für $a \notin \ker(\gamma) = (0)$ ist $\varphi_{i,a}$ eine separable Isogenie. Der induzierte Morphismus der Tangentialräume ist somit eine Isomorphie. Damit gilt $\mathrm{T}_0\,\varphi_{2,a} \circ f_0 = f_0 \circ \mathrm{T}_0\,\varphi_{1,a}$ für alle $a \in A \setminus \{0\}$.
Da $f_0(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$ gilt, erhalten wir aus dem kommutativen Diagramm 5.2.1 die Abbildung $f : G_1(\mathbb{C}_\infty) \to G_2(\mathbb{C}_\infty)$ mit $\exp_{G_2} \circ f_0 = f \circ \exp_{G_1}$. Zusammen mit der definierenden Eigenschaft der Exponentialfunktion folgt $f \circ \varphi_{1,a} \circ \exp_{G_1}(z) = \varphi_{2,a} \circ f \circ \exp_{G_1}(z)$ für alle $z \in \mathrm{T}_0\,G_1$ und alle $a \in A \setminus \{0\}$. Da die Exponentialfunktion nach Voraussetzung surjektiv ist, wird die Bedingung $\varphi_{2,a} \circ f(x) = f \circ \varphi_{1,a}(x)$ für alle $x \in G_1(\mathbb{C}_\infty)$ und für alle $a \in A \setminus \{0\}$ erfüllt. Wie wir in Korollar 5.4.8 zeigen werden, gilt $f_0 = \mathrm{T}_0\,f$, das heißt f ist ein Homomorphismus von abelschen Anderson A-Moduln.
Die Surjektivität und Endlichkeit von f folgt direkt aus der Kommutativität des Diagramms 5.2.1. $\square$

Es bleibt die Algebraizität $f_0 = \mathrm{T}_0\,f$ zu zeigen, das heißt, wir müssen zeigen, dass f durch Polynome gegeben ist. Das werden wir im Abschnitt 5.4 erarbeiten.

Wir haben mit Satz 5.2.1 gezeigt, dass Anderson A-Motive mit isomorphen CM-Typ in einer Isogenieklasse liegen.

Satz 5.2.2 Es existiert eine Injektion zwischen der Menge der Isogenieklassen der reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM-Anderson A-Motiven und der Menge der Isomorphieklassen der CM-Typen.

Beweis: Seien $(E_1, \mathfrak{q}_1)$ und $(E_2, \mathfrak{q}_2)$ isomorphe CM-Typen der reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM abelschen Anderson A-Moduln $\underline{G_1}$ und $\underline{G_2}$. Nach Satz 5.1.3 erhalten wir die Wohldefiniertheit der Abbildung. Die Injektivität folgt aus Satz 5.2.1, der besagt, dass abelsche Anderson A-Moduln mit isomorphen CM-Typen isogen sind.
Bilden wir die zu den abelschen Anderson A-Moduln assoziierten Anderson A-Motive folgt die Behauptung. $\square$

5.3 Klassifikation bis auf Isomorphie

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Injektion von der Menge der Isogenieklassen der reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM-Anderson A-Motiven in die Menge der Isomorphieklassen der CM-Typen gezeigt. Nun wollen wir die Injektion von der Menge der Isomorphieklassen der reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM-Anderson A-Motive in die Isomorphieklassen der CM-Typen mit Gitter zeigen.
Wir zeigen dazu, dass die Isogenie zwischen den abelschen Anderson A-Moduln aus Satz 5.2.1 injektiv ist. Dazu muss eine zusätzliche Information zu dem CM-Typen hinzugenommen werden. Und zwar definieren wir das Gitter $\mathfrak{a}$ als den Kern der Abbildung $E \to Q \otimes_A \Lambda \to G_{tors}(\mathbb{C}_\infty)$, wobei der erste Teil der Abbildung aus Satz 4.4.9 stammt und der zweite Teil der Abbildung die Einschränkung der Exponentialfunktion von G auf $Q \otimes_A \Lambda$ ist.
Im Folgenden zeigen wir, dass die Definition des Gitters $\mathfrak{a}$ wohldefiniert ist.

Dazu definieren wir zu einem reinen, halbeinfachen, uniformisierbaren, CM abelschen Anderson A-Modul $\underline{G}$, ausgehend von der exakten Sequenz der Uniformisierbarkeit, das Gitter $\mathfrak{a}$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & \mathrm{T}_0\, G \arrow[r, two heads, "\exp_G"] & G(\mathbb{C}_\infty) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[u, phantom] & Q \otimes_A \Lambda \arrow[r, two heads, "e_{tors}"] \arrow[u, hook] & G_{tors}(\mathbb{C}_\infty) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[u, "\sim"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[u, "\alpha", "\sim"'] & G_{tors}(\mathbb{C}_\infty) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Der Morphismus $\alpha : E \to Q \otimes_A \Lambda \cong E \cdot \lambda_0$ ist durch $g \mapsto \mathrm{T}_0\, g(\lambda_0)$ gegeben, wobei λ_0 eine E-Basis von $Q \otimes_A \Lambda$ ist (siehe Satz 4.4.9).
Die Abbildung e_{tors} ist wohldefiniert, denn für ein Element $x \in Q \otimes_A \Lambda = (A \setminus \{0\})^{-1}\Lambda$, also $x = \frac{b}{a} \cdot \lambda$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in \Lambda$, gilt, dass $\mathrm{T}_0\, \varphi_a(x)$ ein Element von $\Lambda = \ker(\exp_G)$ ist.
Somit gilt für $x \in Q \otimes_A \Lambda$, dass $0 = \exp_G(\mathrm{T}_0\, \varphi_a(x)) \overset{Eig.\, \exp_G}{=} \varphi_a(\exp_G(x))$ erfüllt ist, das heißt, für alle $x \in Q \otimes_A \Lambda$ gilt $\exp_G(x) \in G_{tors} = \{z \in G \mid \exists a \in A \text{ mit } \varphi_a(z) = 0\}$.
Nun müssen wir noch zeigen, dass die Abbildung e_{tors} surjektiv ist. Dazu wählen wir ein $z \in G_{tors}(\mathbb{C}_\infty) \subseteq G(\mathbb{C}_\infty)$. Da $\exp_G$ auf $G(\mathbb{C}_\infty)$ surjektiv ist, existiert ein $x \in \mathrm{T}_0\, G$ derart,

dass $\exp_G(x) = z$ gilt. Wir wissen außerdem, dass ein $a \in A$ existiert mit $\varphi_a(z) = 0$, da z in den Torsionspunkten $G_{tors}(\mathbb{C}_\infty)$ liegt.
Damit folgt $0 = \varphi_a(z) = \varphi_a(\exp_G(x)) \overset{Eig.\exp_G}{=} \exp_G(\mathrm{T}_0\, \varphi_a(x))$ und somit $\mathrm{T}_0\, \varphi_a(x) \in \Lambda$, also $x \in Q \otimes_A \Lambda$.

Lemma 5.3.1 Das Gitter $\mathfrak{a} := \ker(e_{tors} \circ \alpha^{-1}) = \{g \in E \mid \mathrm{T}_0\, g(\lambda_0) \in \Lambda\}$ mit α wie in den vorangegangenen Überlegungen ist wohldefiniert. □

Satz 5.3.2 Es existiert eine Injektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der reinen, uniformisierbaren, halbeinfachen Anderson A-Motiven mit komplexer Multiplikation und der Menge der Isomorphieklassen der CM-Typen zusammen mit dem Gitter $(E, \mathfrak{q}, \mathfrak{a})$.

Beweis: Seien $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ zwei solcher Anderson A-Motive und E_1 und E_2 die entsprechenden CM-Algebren. Seien nun $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ isomorph. Um zu zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist, bleibt nach Satz 5.2.2 die Isomorphie von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zu zeigen. Diese folgt aus der Definition der Gitter $\mathfrak{a}_i$, da E_1 und E_2, sowie Λ_1 und Λ_2 isomorph sind.
Für $(E_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{a}_1) \cong (E_2, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{a}_2)$ gilt nach Satz 5.2.2, dass $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ isogen sind. Sei f die Isogenie zwischen den assoziierten abelschen Anderson A-Moduln. Aus Satz 5.2.1 folgt, dass $\mathrm{T}_0\, f$ ein Isomorphismus der Tangentialräume ist. Es gilt $\mathrm{T}_0\, G_1/\Lambda_1 \cong \mathrm{T}_0\, G_2/\Lambda_2$, da Λ_1 und Λ_2 durch die Isomorphie von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auch isomorph sind. Damit ist auch f ein Isomorphismus und wir erhalten die Injektivität. □

Für die Injektivität der Abbildung haben wir wieder auf Korollar 5.4.8 vorgegriffen, da wir erst im kommenden Abschnitt die Algebraizität von f beweisen.

5.4 Algebraizitätssatz für $A = \mathbb{F}_q[t]$

Gegeben ist die Abbildung $f : G_1(\mathbb{C}_\infty) \to G_2(\mathbb{C}_\infty)$ aus dem Beweis von Satz 5.2.1 zwischen zwei uniformisierbaren, reinen, halbeinfachen, CM abelschen Anderson A-Moduln mit $f \circ \varphi_{1,a} = \varphi_{2,a} \circ f$ für alle $a \in A$ und ein Isomorphismus der Tangentialräume f_0 mit $\exp_{G_2} \circ f_0 = f \circ \exp_{G_1}$.

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass $\mathrm{T}_0 f = f_0$ gilt, also, dass f ein algebraischer Morphismus ist und damit ein Homomorphismus von abelschen Anderson A-Moduln.
Dazu zeigen wir zunächst in Satz 5.4.3, dass f ein analytischer Morphismus ist. Dann wenden wir Serres Prinzip "Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique", kurz GAGA, an. Dazu müssen wir die Abbildung f auf Garben erweitern und zeigen, dass bei diesem Übergang keine Singularität entsteht. Mit GAGA erhalten wir dann den gewünschten algebraischen Morphismus.

Im Folgenden betrachten wir die Analytifizierung des additiven Gruppenschemas G, die wir mit G^{rig} bezeichnen. Da wir wissen, dass $\mathbb{G}^d_{a,\mathbb{C}_\infty} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}_\infty[x_1, \dots, x_d] = \mathbb{A}^d$ gilt, können wir die rigid-analytische Version des d-dimensionalen algebraischen affinen Raums betrachten und erhalten so die Analytifizierung des additiven Gruppenschemas, das heißt $G^{rig} = \mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$.

Bemerkung 5.4.1 (affiner Raum) [BGR84, Ex 9.3.4/1] Für Variablen $x_1, \dots, x_d$ und einer Konstanten $\xi \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ mit $|\xi| < 1$ können wir die offenen, affinoiden Mengen

$$B(n) := \operatorname{Sp} \mathbb{C}_\infty \langle \frac{x_1}{\xi^{-n}}, \dots, \frac{x_d}{\xi^{-n}} \rangle$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu einer rigid-analytischen Varietät $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$ verkleben. Wir nennen $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$ den d-dimensionalen, affinen Raum. Die Vereinigung der $B(n)$ bildet eine zulässige Überdeckung von $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$.
Da $\mathbb{C}_\infty[x_1, \dots, x_d] \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}}(\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty})$ gilt, können wir die x_i als Menge von Koordinaten für $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$ auffassen und die $B(n)$ den Bällen von Radius $|\xi|^{-n}$ um den Ursprung zuordnen. Also können wir $\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty}$ als die rigid-analytische Version des d-dimensionalen, algebraischen affinen Raums $\mathbb{A}^d$ auffassen.
Insbesondere gilt wegen $G = \mathbb{G}^d_{a,\mathbb{C}_\infty} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}_\infty[x_1, \dots, x_d] = \mathbb{A}^d$, dass die Analytifizierung von G durch

$$G^{rig} = \mathbb{A}^d_{\mathbb{C}_\infty} = \bigcup_{n>0} B(n)$$

gegeben ist.

Nun definieren wir $\mathbb{C}_\infty\{x_1, \dots, x_d\}$ als den Ring der ganzen rigid-analytischen Funktionen auf G_2^{rig} und $\mathbb{C}_\infty\{y_1, \dots, y_d\}$ als den entsprechenden Ring auf G_1^{rig}.

Lemma 5.4.2 Zu jedem Ringhomomorphismus $\sigma : \mathbb{C}_\infty\{x_1, \ldots, x_d\} \to \mathbb{C}_\infty\{y_1, \ldots y_d\}$, existiert ein eindeutiger, rigid-analytischer Morphismus

$$f : G_1^{rig} \to G_2^{rig},$$

so dass der Homomorphismus $f^* : \mathcal{O}_{\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}})$ dem Homomorphismus σ entspricht, das heißt $f^* = \sigma$.

Beweis: Wir betrachten die nach [BGR84, Ex 9.3.4/1] zulässige Überdeckung von G_1^{rig} der Form

$$\bigcup_{n>0} \{y \in G_1^{rig} \mid |y| \leq |\xi|^{-n}\} \tag{5.4.1}$$

für ein festes $\xi \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ mit $|\xi| < 1$.
Denn jedes Element $y \in G_1^{rig}$ liegt in einem $B_1(n) := \{y \in G_1^{rig} \mid |y| \leq |\xi|^{-n}\}$, da $|\xi|^{-n}$ für $n \to \infty$ gegen ∞ konvergiert. Damit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $y \in B_1(n)$ liegt und es gilt $G_1^{rig} = \bigcup_{n>0} \{y \in G_1^{rig} \mid |y| \leq |\xi|^{-n}\}$.
Wir wählen nun ein n fest.

$$\mathbb{C}_\infty\{x_1, ..., x_d\} = \mathcal{O}_{\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}) \hookrightarrow \mathcal{O}_{G_1}(B_1(n)) \overset{n'<n}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{G_1}(B_1(n'))$$

Wir können somit die x_i als Koordinatenfunktionen des affinen Raums auffassen. Somit liegt das Bild der Koordinatenfunktion $\sigma(x_i)$ in $\mathcal{O}_{G_1^{rig}}(B_1(n))$.
Da $\sigma(x_i)(P)$ für jedes $P \in B_1(n)$ betraglich beschränkt ist, existiert nach dem Maximumsprinzip [BGR84, Lemma 9.1.4/6] ein $m_i := m_i(n)$, derart dass

$$|\sigma(x_i)(P)| \leq |\xi|^{-m_i}$$

für alle $P \in B_1(n)$ gilt. Wir setzen $m := m(n) := \max_i\{m_i\}$ und erhalten somit

$$|\sigma(x_i)(P)| \leq |\xi|^{-m} \tag{5.4.2}$$

für alle $P \in B_1(n)$ und für alle $i = 1, \ldots, d$. Wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_\infty\{x_1, \ldots, x_d\} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}_\infty\{y_1, \ldots, y_d\} \arrow[d, hook] \\
\mathcal{O}_{G_2^{rig}}(B_2(m(n))) \arrow[r, dashed, "f_n^*"] & \mathcal{O}_{G_1^{rig}}(B_1(n))
\end{tikzcd}$$

$$\frac{x_i}{\xi^{-m}} \mapsto \frac{\sigma(x_i)}{\xi^{-m}}.$$

Die Abbildung $\sum_{l=0}^{\infty} a_l (\frac{x_i}{\xi^{-m}})^l \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} a_l (\frac{\sigma(x_i)}{\xi^{-m}})^l$ ist wohldefiniert, denn a_l ist eine Nullfolge und $|(\frac{\sigma(x_i)}{\xi^{-m}})^l|$ wegen (5.4.2) kleiner als 1. Damit konvergiert die Potenzreihe und f_n^* wird induziert. Nun ist $\mathbb{C}_\infty\{x_1, \ldots, x_d\} \hookrightarrow \mathcal{O}_{G_2^{rig}}(B_2(m(n))) = \mathbb{C}_\infty \left\langle \frac{x_1}{\xi^{-m}}, ..., \frac{x_d}{\xi^{-m}} \right\rangle$ dicht und f_n^* ist eindeutig.

Wir erhalten also die zugehörige Abbildung

$$f_n := \operatorname{Sp} f_n^* : B_1(n) \to B_2(m(n)) \hookrightarrow G_2^{rig}.$$

Zu n und l mit $n < l$ ergeben die Abbildungen f_n und f_l auf dem Schnitt von $B_1(n)$ und $B_1(l)$ dieselbe rigid-analytische Abbildung,

$$f_{n,l} = f_l \ : \ B_1(l) = B_1(n) \cap B_1(l) \ \longrightarrow \ B_2(m(n)) \cap B_2(m(l)) \subseteq B_2(m(l)).$$

Mit [BGR84, Prop 9.3.3/1] folgt die Existenz eines eindeutigen rigid-analytischen Morphismus $f := \bigcup_n f_n : G_1^{rig} \to G_2^{rig}$, der alle f_n erweitert mit $f^* = \sigma$. □

Satz 5.4.3 Die Abbildung $f : G_1(\mathbb{C}_\infty) \to G_2(\mathbb{C}_\infty)$ induziert einen Morphismus von rigid analytischen Räumen, $f : G_1^{rig} \to G_2^{rig}$.

Beweis: Wir setzen $T_1 := \mathrm{T}_0 G_1$ als Tangentialraum von G_1 an Null und $T_2 := \mathrm{T}_0 G_2$ entsprechend. Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{i,\lambda} : T_i &\to T_i \\ x &\mapsto x + \lambda \end{aligned}$$

jeweils definiert als die Translation um $\lambda \in \Lambda_i$ auf T_i. Da Λ_i als Kern der Exponentialfunktion von G_i definiert ist, gilt

$$\exp_{G_i} \circ \operatorname{tr}_{i,\lambda} = \exp_{G_i} \tag{5.4.3}$$

für alle $\lambda \in \Lambda_i$.

Um zu zeigen, dass f ein Morphismus von rigid-analytischen Räumen ist, müssen wir zeigen, dass für jede ganze Funktion $h \in \mathcal{O}_{\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_2^{\mathrm{rig}})$ die Funktion $f^*(h) := h \circ f$ ganz ist und in $\mathcal{O}_{\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}})$ liegt. Denn dann folgt mit Lemma 5.4.2 die Behauptung. Dazu zeigen wir zunächst, dass

$$\exp_{G_1}^* : \mathcal{O}_{\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{G}_1^{\mathrm{rig}}) \to \left\{ h' \in \mathcal{O}_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}) \mid \mathrm{tr}_{1,\lambda}^*(h') = h' \text{ für alle } \lambda \in \Lambda_1 \right\}$$

ein Ringisomorphismus ist.
Wegen (5.4.3) gilt $\exp^*_{G_1}(h) = \mathrm{tr}^*_{1,\lambda}(\exp^*_{G_1}(h))$ für alle $\lambda \in \Lambda_1$ und für alle ganzen Funktionen $h \in \mathcal{O}_{G_1^{\mathrm{rig}}}(G_1^{\mathrm{rig}})$. Somit ist $\exp^*_{G_1}$ wohldefiniert. Aus der Surjektivität von $\exp_{G_1}$ folgt die Injektivität von $\exp^*_{G_1}$ und, da $\exp_{G_1} : \mathrm{T}_0\, G_1/\Lambda_1 \to G_1(\mathbb{C}_\infty)$ ein Isomorphismus ist, folgt auch die Isomorphie von $\exp^*_{G_1}$.
Damit bleibt

$$\exp^*_{G_1}(f^*(h)) \in \left\{ h' \in \mathcal{O}_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}) \mid \mathrm{tr}^*(h') = h' \text{ für alle } \lambda \in \Lambda_1 \right\}$$

für alle $h \in \mathcal{O}_{G_2^{\mathrm{rig}}}(G_2^{\mathrm{rig}})$ zu zeigen.
Der Isomorphismus der Tangentialräume $f_0 : T_1 \xrightarrow{\sim} T_2$ induziert einen Isomorphismus $f_0^* : \mathcal{O}_{\mathrm{T}_2^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_2^{\mathrm{rig}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}})$. Für eine ganze Funktion h aus $\mathcal{O}_{G_2^{\mathrm{rig}}}(G_2^{\mathrm{rig}})$ liegt $f_0^*(\exp_{G_2}(h))$ in $\mathcal{O}_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}})$. Nach Voraussetzung gilt $\exp_{G_2} \circ f_0 = f \circ \exp_{G_1}$, also auch

$$f_0^* \circ \exp^*_{G_2}(h) = \exp^*_{G_1} \circ f^*(h).$$

Damit liegt $\exp^*_{G_1} \circ f^*(h)$ in $\mathcal{O}_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}}}(\mathrm{T}_1^{\mathrm{rig}})$.
Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}^*_{1,\lambda}(\exp_{G_1}(f^*(h))) &= \mathrm{tr}^*_{1,\lambda} \circ f_0^* \circ \exp^*_{G_2}(h) \\
&= f_0^* \circ \mathrm{tr}^*_{2,f_0(\lambda)} \circ \exp^*_{G_2}(h) \\
&\overset{\substack{(5.4.3)\\ f_0(\lambda)\in\Lambda_2}}{=} f_0^* \circ \exp^*_{G_2}(h) \\
&= \exp^*_{G_1}(f^*(h)).
\end{aligned}$$

Damit liegt $f^*(h)$ für jedes $h \in \mathcal{O}_{G_2^{\mathrm{rig}}}(G_2^{\mathrm{rig}})$ in $\mathcal{O}_{G_1^{\mathrm{rig}}}(G_1^{\mathrm{rig}})$, das heißt f^* ist ein Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{G_2^{\mathrm{rig}}}(G_2^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{G_1^{\mathrm{rig}}}(G_1^{\mathrm{rig}})$.
Mit Lemma 5.4.2 existiert der geforderte Morphismus der rigid-anayltischen Räume. □

Nach [Gar03, Thm 1.3] sind die Kategorie der reinen Anderson A-Motive, ausgestattet mit analytischen Morphismen, und die Kategorie der reinen abelschen Anderson A-Moduln, ausgestattet mit analytischen Morphismen, anti-äquivalent. Wir können also zu dem analytischen Morphismus $f : \underline{M}_2 \to \underline{M}_1$ übergehen.

Satz 5.4.4 Zu einem reinen, halbeinfachen Anderson A-Motiv $\underline{M} = (M, \tau)$ über $\mathbb{C}_\infty$ mit Gewicht $\frac{k}{l}$ existiert eine invertierbare Garbe $\mathfrak{F}$ auf $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty}$, so dass

$$z^k \tau^l : (\sigma^*)^l \mathfrak{F}_{\infty'_\nu} \to \mathfrak{F}_{\infty'_\nu}$$

ein Isomorphismus der Halme bei $\tilde{\infty}'_\nu \in \tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}$ ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ die in Lemma 3.4.3 zu dem Anderson A-Motiv $\underline{M}$ konstruierte, invertierbare Garbe auf $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty}$. Der injektive $\mathcal{O}_{\mathrm{E},\mathbb{C}_\infty}$-Modulhomomorphismus τ_M aus Satz 3.3.5 induziert einen injektiven Morphismus der Garben außerhalb von $\tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}$. Mit $\tilde{z}_\nu$ bezeichnen wir den uniformisierenden Parameter von $\tilde{\infty}'_\nu \in \tilde{\infty}_L$.
Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\tau : \sigma^*\mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu} \otimes_R \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\eta} \longrightarrow \mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu} \otimes_R \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\eta}$$

mit dem diskreten Bewertungsring $R := \mathcal{O}_{\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu},\tilde{\infty}'_\nu}$ von $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu}$ am Punkt $\tilde{\infty}'_\nu \in \tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu} \setminus \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E},\mathbb{C}_\infty}$ und dem generischen Punkt $\eta \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E},\mathbb{C}_\infty}$ auf $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu}$.
Der Kokern von τ wird von einem Ideal $\mathcal{I}$ annulliert und hat somit den Träger bei einem abgeschlossenen Punkt $z = \zeta$. Wir bezeichnen den Verzweigungsindex von $\tilde{\infty}'_\nu$ über ∞ mit $v_\nu := v_{\tilde{z}_\nu}(z)$.
Da alle R-Untermoduln von $\operatorname{Quot}(R) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R,\eta} = E_{\mathbb{C}_\infty,\nu}$ die Form $\tilde{z}_\nu^n \cdot R$ haben, können wir das Bild von τ durch $\mathfrak{F}_\nu(e_\nu)$ mit $e_\nu \in \mathbb{Z}$ beschreiben. Wir erhalten so den Isomorphismus

$$\tau_\nu : \sigma^*\mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu}(e_\nu).$$

Wir wissen, dass $(\pi)_*\mathfrak{F}$ eine Garbe auf $C_{\mathbb{C}_\infty}$ mit $\Gamma(\operatorname{Spec} A_{\mathbb{C}_\infty}, (\pi)_*\mathfrak{F}) = M$ als $A_{\mathbb{C}_\infty}$-Modul ist. Wir können den Halm von $(\pi)_*\mathfrak{F}$ am generischen Punkt von $C_{\mathbb{C}_\infty}$ bilden und, da $Q_{\mathbb{C}_\infty} = \operatorname{Quot}(A_{\mathbb{C}_\infty}) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty})$ gilt, erhalten wir

$$M \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} Q_{\mathbb{C}_\infty} = (\pi)_*\mathfrak{F} \otimes_{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty}} Q_{\mathbb{C}_\infty} = (\pi)_*\mathfrak{F}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty}} Q_{\mathbb{C}_\infty}.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\{\infty \in U\} \subseteq \{\text{gen Pkt} \in V\}$ liegt.
Komplettieren wir nun bei ∞, so erhalten wir

$$M \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} Q_{\infty,\mathbb{C}_\infty} = (\pi)_*\mathfrak{F}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty}} Q_{\infty,\mathbb{C}_\infty}.$$

Sei $E_{\tilde{\infty}'_\nu,\mathbb{C}_\infty}$ die Komplettierung von $E_{\mathbb{C}_\infty} := E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{C}_\infty$ bei $\tilde{\infty}'_\nu$. Setzen wir weiter $\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty} \otimes_{\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty}}} \mathcal{O}_{\cup_\nu \tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu}} =: S$, so gilt $\mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty} \subseteq S$ und wir können das Ideal $(z) \subseteq \mathcal{O}_{C_{\mathbb{C}_\infty},\infty}$ in S beschreiben durch

$$(z) = \prod_\nu (\tilde{z}_\nu)^{v_\nu}.$$

Also gilt ebenso $(z)^n = \prod_\nu (\tilde{z}_\nu)^{n \cdot v_\nu}$ und auch

$$\varprojlim_n S/(z)^n = \bigoplus_\nu \varprojlim_n S/(\tilde{z}_\nu)^{n\cdot v_\nu} = \bigoplus_\nu \varprojlim_m S/(\tilde{z}_\nu)^{m\cdot v_\nu}.$$

Es gilt also $Q_{\infty,\mathbb{C}_\infty} = \bigoplus_\nu E_{\tilde{\infty}'_\nu,\mathbb{C}_\infty}$.
Mit diesen Vorüberlegungen betrachten wir das lokale σ-Isoshtuka von $\underline{M}$ bei ∞.

$$\begin{aligned}
(M,\tau_M) \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} \mathbb{C}_\infty((z)) &\cong (M,\tau_M) \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} Q_{\infty,\mathbb{C}_\infty} \\
&\cong (M,\tau_M) \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} (\bigoplus_\nu E_{\tilde{\infty}'_\nu,\mathbb{C}_\infty}) \\
&\cong \bigoplus_\nu (\mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu}, \tau) \otimes_R E_{\tilde{\infty}'_\nu,\mathbb{C}_\infty} \\
&\cong \bigoplus_\nu (E_{\tilde{\infty}'_\nu,\mathbb{C}_\infty}, \tau = \tilde{z}_\nu^{-e_\nu} \cdot u_\nu) \\
&\cong \bigoplus_\nu (\mathbb{C}_\infty((\tilde{z}_\nu)), \tau)
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Dabei sei u_ν eine Einheit. Nach Theorem 4.3.4 gilt

$$(M,\tau) \otimes_{A_{\mathbb{C}_\infty}} Q_{\infty,\mathbb{C}_\infty} \cong V_{\frac{k}{l},1}^{\oplus r}.$$

Können wir $(\mathbb{C}_\infty((\tilde{z}_\nu)),\tau)$ ähnlich darstellen, so erhalten wir ein Verhältnis zwischen e_ν und k und l.
Wir betrachten nun $\mathbb{C}_\infty((\tilde{z}_\nu)) \cong \mathbb{C}_\infty((z))\left[\tilde{z}_\nu\right] / \left(\tilde{z}_\nu^{v_\nu} \cdot u' - z\right) \cong \bigoplus_{n=0}^{v_\nu} \tilde{z}_\nu^n \cdot \mathbb{C}_\infty((z))$ für eine Einheit u' und können τ bezüglich einer Basis darstellen.
Dabei können wir die Spalten 1 bis e_ν gemeinsam betrachten

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= \tilde{z}_\nu^{-e_\nu} \cdot u_\nu = \tilde{z}_\nu^{v_\nu - v_\nu - e_\nu} \cdot u' u'^{-1} u_\nu \\
&\overset{z^{-1} = \tilde{z}_\nu^{-v_\nu} \cdot u'^{-1}}{=} z^{-1} u' u_\nu \cdot \tilde{z}_\nu^{v_\nu - e_\nu},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(\tilde{z}_\nu^{e_\nu - 1}) &= \tilde{z}_\nu^{-1} \cdot u = \tilde{z}_\nu^{v_\nu - v_\nu - 1} \cdot u' u'^{-1} u_\nu \\
&\overset{z^{-1} = \tilde{z}_\nu^{-v_\nu} \cdot u'^{-1}}{=} z^{-1} u' u_\nu \cdot \tilde{z}_\nu^{v_\nu - 1},
\end{aligned}$$

sowie die Spalten $e_\nu + 1$ bis v_ν

$$\tau(\tilde{z}_\nu^{e_\nu}) = \tilde{z}_\nu^0 \cdot u_\nu = u_\nu,$$

$$\tau(\tilde{z}_\nu^{v_\nu - 1}) = \tilde{z}_\nu^{v_\nu - e_\nu - 1} \cdot u_\nu.$$

Damit erhalten wir die Matrix

$$\tau_\nu = \begin{pmatrix} & & & u_\nu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & u_\nu \\ z^{-1}u'u_\nu & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & z^{-1}u'u_\nu & & & \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir $\tau_\nu^{v_\nu}$ so wird der l-te Basisvektor auf ein Vielfaches des $(v_\nu - e_\nu - 1 + l)$-ten Basisvektors modulo v_ν abgebildet. Die Matrix hat also Diagonalgestalt mit Einträgen $z^{-e_\nu} \cdot \bar{u}$ für eine Einheit $\bar{u}$. Damit ist $z^{e_\nu} \cdot \tau_\nu^{v_\nu}$ ein Isomorphismus. Wegen (5.4.4) erhalten wir

$$V_{\frac{k}{l},1}^{\oplus r} \cong V_{\frac{e_\nu}{v_\nu},1}^{\oplus s}$$

und somit gilt $\frac{k}{l} = \frac{e_\nu}{v_\nu}$ und wir erhalten den gewünschten Isomorphismus der Halme bei $\tilde{\infty}'_\nu$,

$$z^k\tau^l : (\sigma^*)^l \mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu} \to \mathfrak{F}_{\tilde{\infty}'_\nu}.$$

□

Korollar 5.4.5 Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.4.4. Dann teilt l den Verzweigungsindex v_ν.

Beweis: Nach Satz 5.4.4 gilt $\frac{k}{l} = \frac{e_\nu}{v_\nu}$. Da k und l teilerfremd sind, folgt die Behauptung. □

Die rigid-analytische Abbildung $f : \underline{M}_2 \to \underline{M}_1$ kommutiert mit der Operation von $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ und induziert daher eine rigid-analytische Abbildung $f : \underline{\mathfrak{F}}_2|_{\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty} \setminus \tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}} \to \underline{\mathfrak{F}}_1|_{\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty} \setminus \tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}}$ außerhalb von $\tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}$. Wir werden in den nächsten Sätzen zeigen, dass wir die Garben so modellieren können, dass die Abbildung f bei jedem $\tilde{\infty}'_\nu$ nur einen Pol hat und keine wesentliche Singularität.
Um zu zeigen, dass bei dem Übergang von den Anderson A-Motiven zu den Garben die Abbildung f rigid-analytisch bleibt, brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.4.6 Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\underline{\mathfrak{F}}$ derart, dass $\underline{\mathfrak{F}}|_{\{|\tilde{z}_\nu| \leq |\rho|\}} \cong \mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho}\rangle$ ist, mit $z^k\tau^l = \mathrm{id}$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ und $0 < |\rho| < 1$.

Beweis: Nach [BL85, Prop 2.2.i] existiert eine rigid-analytische Umgebung von $\tilde{\infty}'_\nu$ auf $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu}$ der Form $\mathrm{Sp}\,\mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho}\rangle = \{|\tilde{z}_\nu| \leq \rho\}$ für $0 < |\rho| < 1$, so dass $\underline{\mathfrak{F}}|_{\{|\tilde{z}_\nu|\leq|\rho|\}} \cong \mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho}\rangle$ ist.
Wir betrachten zunächst $z^k\tau^l = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j\tilde{z}_\nu^j$ bezüglich dieser Basis. Wir wissen aus Satz 5.4.4, dass $z^k\tau^l$ bei ∞ ein Isomorphismus ist, das heißt, dass $z^k\tau^l$ eine Einheit in $\mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho}\rangle$ ist. Die Koeffizienten c_j bilden also eine Nullfolge und es existiert eine Schranke $N \in \mathbb{R}^{\geq 1}$ mit $|c_j\rho^j| \leq N$ für alle j.
Wie suchen nun eine Basiswechselmatrix $\Phi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \phi_n\tilde{z}_\nu^n \in \mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho}\rangle^x$ mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j\tilde{z}_\nu^j(\sigma^*)^l\Phi = \Phi\cdot 1.$$

Damit muss Φ folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j\tilde{z}_\nu^j(\sigma^*)^l\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\tilde{z}_\nu^n \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\tilde{z}_\nu^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} c_j\phi_{n-j}^{q^l}\right)\tilde{z}_\nu^n \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\tilde{z}_\nu^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_{n-j}^{q^l} \overset{!}{=} \phi_n \tag{5.4.5}$$

Ohne Einschränkung können wir $c_0 = 1$ setzen, denn für $\mu \in \mathbb{C}_\infty$ mit $\mu^{q^l-1} = \frac{1}{c_0}$ erhalten wir $\left(\sum_j c_j\tilde{z}_\nu^j\right)(\sigma^*)^l(\mu) = \left(\sum_j c_j\tilde{z}_\nu^j\right)\mu^{q^l} = \mu\left(\sum_j c_j\tilde{z}_\nu^j\right)\mu^{q^l-1} = \mu\left(\frac{1}{c_0}\sum_j c_j\tilde{z}_\nu^j\right) = \mu\left(\sum_j \tilde{c}_j\tilde{z}_\nu^j\right)$ mit $\tilde{c}_j := \frac{c_j}{c_0}$ und damit $\tilde{c}_0 = 1$.
Mit 5.4.5 folgt, dass $\phi_0^{q^l} = \phi_0$ gilt. Wir setzen oBdA $\phi_0 = 1$ und wählen induktiv für alle n ein $\phi_n \in \mathbb{C}_\infty$, das Gleichung (5.4.5) erfüllt. Dies existiert, da $\mathbb{C}_\infty$ algebraisch abgeschlossen ist.

<u>Behauptung:</u> Die Potenzreihe $\Phi = \sum\phi_n\tilde{z}_\nu^n$, die die Bedingung 5.4.5 erfüllt, liegt in $\mathbb{C}_\infty\langle\frac{\tilde{z}_\nu}{\rho'}\rangle$, mit $0 < |\rho'| < \min\{|\rho|, \left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{-q^l}\} < 1$.
Dazu müssen wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}|\phi_n\rho'^n| = 0$ gilt. Mit $\left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{-\frac{n}{q^l}}\cdot\left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{\frac{n}{q^l}}$ erweitert, ergibt dies

$$\lim_{n\to\infty}|\phi_n\rho^{\frac{n}{q^l}}|N^{-n/q^l}\left(\frac{|\rho'|}{\left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{-q^l}}\right)^n = 0.$$

Betrachten wir den zweiten Teil innerhalb des Limes, so können wir aus der Voraussetzung $|\rho'| < \left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{-q^l}$ folgern, dass $\left(\frac{|\rho'|}{\left(\frac{|\rho|}{N}\right)^{-q^l}}\right)^n$ eine Nullfolge ist.
Damit bleibt $|\phi_n\rho^{\frac{n}{q^l}}| \leq N^{\frac{n}{q^l}}$ für $n >> 0$ zu zeigen.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt wegen $\phi_0 = 1$ die Behauptung.
Aus Gleichung 5.4.5 können wir wegen $c_0 = 1$ die Bedingung $\phi_n - \phi_n^{q^l} = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_{n-j}^{q^l}$ folgern. Damit gilt auch $\phi_n \rho^n - \phi_n^{q^l} \rho^n = \sum_{j=1}^{n} c_j \rho^n \phi_{n-j}^{q^l}$ sowie

$$\phi_n \rho^n - \left(\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}\right)^{q^l} = \sum_{j=1}^{n} c_j \rho^j \left(\phi_{n-j} \rho^{\frac{n-j}{q^l}}\right)^{q^l}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|\phi_{n-j} \rho^{\frac{n-j}{q^l}}| \leq N^{\frac{n-j}{q^l}}$ für $j > 0$. Damit können wir $|\left(\phi_{n-j} \rho^{\frac{n-j}{q^l}}\right)^{q^l}|$ durch N^{n-j} und damit durch N^{n-1} nach oben abschätzen. Mit der Voraussetzung $|c_j \rho^j| \leq N$ für alle j, ist $|\phi_n \rho^n - \left(\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}\right)^{q^l}|$ durch N^n nach oben beschränkt. Also gilt

$$|\phi_n \rho^n - \left(\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}\right)^{q^l}| = |\sum_{j=1}^{n} c_j \rho^j \left(\phi_{n-j} \rho^{\frac{n-j}{q^l}}\right)^{q^l}| \leq N^n.$$

Wir nehmen nun an, dass $|\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}|^{q^l} > N^n \geq 1$ gilt, so gilt insbesondere $\phi_n > 1$. Dann gilt aber auch $|\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}|^{q^l} > N^n \geq |\phi_n \rho^n - \left(\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}\right)^{q^l}| = \max\{|\phi_n \rho^n|, |\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}|^{q^l}\} \overset{Ann}{=} |\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}|^{q^l}$, was im Widerspruch zur Annahme steht.$\lightning$
Damit gilt $|\phi_n \rho^{\frac{n}{q^l}}| N^{-\frac{n}{q^l}} \leq 1$ und Φ konvergiert. $\square$

Satz 5.4.7 Die Abbildung $f : \underline{\mathfrak{F}}_2 \to \underline{\mathfrak{F}}_1$ hat bei jedem $\tilde{\infty}'_\nu \in \tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}$ einen Pol und keine wesentliche Singularität.

Beweis: Nach Lemma 5.4.6 existiert eine Umgebung von $\tilde{\infty}'_\nu$ auf $\tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty,\nu}$, so dass $\underline{\mathfrak{F}}_1$ beziehungsweise $\underline{\mathfrak{F}}_2$ isomorph zu $\mathbb{C}_\infty\langle \frac{\tilde{z}_\nu}{\rho} \rangle$ ist und $z^k \tau_i^l = \mathrm{id}$ nach Wahl einer Basis gilt.
Demnach können wir die Abbildung $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \tilde{z}_\nu^j$ in der Umgebung von $\tilde{\infty}'_\nu$ beschreiben durch:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}_\infty\langle \frac{\tilde{z}_\nu}{\rho} \rangle &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty\langle \frac{\tilde{z}_\nu}{\rho} \rangle \\ 1 &\longmapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \tilde{z}_\nu^j \end{aligned}$$

Es gilt also $\lim_{j\to\infty} |b_j \rho^j| = 0$ und $\lim_{j\to-\infty} |b_j \delta^j| = 0$ für alle δ mit $0 < |\delta| < |\rho| < 1$.
Damit konvergiert f auf $\{0 < |\tilde{z}_\nu| \leq |\rho|\}$.

Nach Voraussetzung kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\sigma^*\mathfrak{F}_1 \arrow[d, "\tau_1"] & \sigma^*\mathfrak{F}_2 \arrow[l, "\sigma^* f"'] \arrow[d, "\tau_2"] \\
\mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd} .$$

Nach Satz 5.4.4 kommutiert außerdem folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(\sigma^*)^l\mathfrak{F}_2|_{\{|\tilde{z}_v|\le|\rho|\}} \arrow[r, "(\sigma^*)^l f"] \arrow[d, "z^k\tau_2^l", "\sim"'] & (\sigma^*)^l\mathfrak{F}_1|_{\{|\tilde{z}_v|\le|\rho|\}} \arrow[d, "z^k\tau_1^l", "\sim"'] \\
\mathfrak{F}_2|_{\{|\tilde{z}_v|\le|\rho|\}} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{F}_1|_{\{|\tilde{z}_v|\le|\rho|\}}
\end{tikzcd} .$$

Aus diesem Diagramm folgt mit $z^k\tau_i^l = \mathrm{id}$, dass $(\sigma^*)^l f = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_j^{q^l}\tilde{z}_v^j = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_j\tilde{z}_v^j = f$ gelten muss. Aus den Konvergenzergebnissen für die b_j folgt $|b_j| < 1$ für alle $j \ll 0$.
In $\mathbb{F}_{q^l} \setminus \{0\}$ existiert kein Element mit Betrag echt kleiner 1 und somit folgt

$$b_j = 0 \qquad\qquad \text{für alle } j \ll 0.$$

Wir wissen damit, dass bei $\tilde{\infty}'_v$ eine Polstelle existiert und keine wesentliche Singularität.

□

Korollar 5.4.8 Sei f eine Abbildung zwischen zwei uniformisierbaren, reinen, halbeinfachen, CM abelschen Anderson A-Moduln $\underline{G}_1$ und $\underline{G}_2$ mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$, die mit $\varphi_{i,a}$ für $i = 1,2$ für alle $a \in A$ vertauscht. Sei weiterhin ein Isomorphismus der Tangentialräume f_0 mit $\exp_{G_2} \circ f_0 = f \circ \exp_{G_1}$ gegeben. Dann existiert ein Morphismus der abelschen Anderson A-Moduln.

Beweis: Nach Satz 5.4.7 besitzt f bei jedem $\tilde{\infty}_v \in \tilde{\infty}_{\mathbb{C}_\infty}$ einen Pol. Wir setzen n_v als Polordnung von f bei $\tilde{\infty}_v$ und erhalten so $f : \underline{\mathfrak{F}}_2 \to \underline{\mathfrak{F}}_1\left(\sum_v n_v\tilde{\infty}_v\right)$. Wir setzen weiter $\underline{\mathcal{G}}_1 := \underline{\mathfrak{F}}_1\left(\sum n_v\tilde{\infty}_v\right)$ als die Garbe zum Divisor $\sum_v n_v\tilde{\infty}_v$. Sie ist eine Garbe von gleichem Rang und gleicher Dimension wie $\underline{\mathfrak{F}}_1$.
Sei $C_{\mathbb{C}_\infty}^{rig}$ die Analytifizierung von $C_{\mathbb{C}_\infty} = C \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec}\mathbb{C}_\infty$. Wir erhalten zu ${}_{(\pi)*}\underline{\mathfrak{F}}_2$ und ${}_{(\pi)*}\underline{\mathcal{G}}_1$ die Analytifizierungen $\underline{\mathfrak{F}}_2^{rig}$ beziehungsweise $\underline{\mathcal{G}}_1^{rig}$. Da wir gezeigt haben, dass f ein analytischer Morphismus ist, können wir f als Morphismus der Analytifizierungen schreiben:

$$f : \underline{\mathfrak{F}}_2^{rig} \to \underline{\mathcal{G}}_1^{rig}$$

Da $C_{\mathbb{C}_\infty}$ ein eigentliches Schema ist, können wir nach [Bos08, 1.16 Thm 12] das GAGA-Prinzip anwenden. Wir finden somit einen algebraischen Morphismus g zwischen den Garben ${}_{(\pi)*}\underline{\mathfrak{F}}_2$ und ${}_{(\pi)*}\underline{\mathcal{G}}_1$, der f induziert, das heißt $f = \hat{g}$. Es gilt außerdem $f|_{C^{rig}_{\mathbb{C}_\infty} \setminus (\pi)_* \bigcup_\nu \{\tilde{\infty}'_\nu\}} = \widehat{g|}_{(\pi)_* \tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty} \setminus \bigcup_\nu \{\tilde{\infty}'_\nu\}}$. Nach Konstruktion liegt $g|_{(\pi)_* \tilde{C}_{\mathbb{C}_\infty} \setminus \bigcup_\nu \{\tilde{\infty}'_\nu\}}$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_\infty}(\underline{M}_2, \underline{M}_1)$. Der assoziierte Morphismus aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_\infty}(\underline{G}_1, \underline{G}_2)$ ist damit unser gesuchter algebraischer Homomorphismus. $\square$

6 CM-Anderson A-Motive lassen sich über einer endlichen Körpererweiterung definieren

Wir betrachten in diesem Kapitel Anderson A-Motive über einem algebraisch abgeschlossenem Körper $L = L^{alg}$ mit komplexer Multiplikation durch O_E, wobei E eine kommutative, halbeinfache Q-Algebra ist. Wir zeigen, dass zu jedem solchen Anderson A-Motiv ein isogenes existiert, welches schon über einer endlichen Körpererweiterung von $\mathrm{Quot}\big(A/\ker(\gamma)\big) =: \kappa(\varepsilon)$ definiert ist.
Das heißt, dass zu $\underline{M}$ ein $\underline{M}_0$ existiert, so dass $f : \underline{M} \to \underline{M}_0 \otimes_{A_{K_0}} A_L$ eine Isogenie ist und $\underline{M}_0$ über K_0, einer endlichen Körpererweiterung von $\kappa(\varepsilon)$, definiert ist.

Dazu zeigen wir, dass zu dem Funktor, der einem C-Schema S die Menge der invertierbaren Garben von Rang 1 und partiellem Grad Null über $\tilde{C}_S$ zuordnet, ein Modulschema J existiert.
Um Anderson A-Motive zu parametrisieren, nutzen wir aus, dass wir in Kapitel 3 gezeigt haben, dass jedes CM-Anderson A-Motiv ein τ-Modul von Rang 1 über $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ ist. Wir kodieren die Informationen über den Kokern von τ und modifizieren das Modulschema entsprechend und erhalten einen Modulraum X, dabei ist X ein lokal noethersches $J \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$-Schema.
Im dritten Abschnitt betrachten wir einen algebraischen Abschluss $K := \kappa(\varepsilon)^{alg}$ von $\kappa(\varepsilon)$ und definieren mit dessen Hilfe die Basiserweiterung $X_\varepsilon := X \times_{C\setminus\{\infty\}} \mathrm{Spec}\, K$. Wir zeigen, dass eine Abbildung $\mathrm{Spec}\, L \to X_\varepsilon$ existiert, die durch $\mathrm{Spec}\, K$ faktorisiert. Dadurch erhalten wir zu jedem Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über L ein Anderson A-Motiv $\underline{M}_0$, welches über K definiert ist mit $\underline{M} \cong \underline{M}_0 \otimes_K L$.
Wir zeigen weiter, dass wir $\underline{M}_0$ über einem affinen Unterschema von X_ε, welches endlich über K ist, definieren können. Mit Hilfe des Ergebnisses aus Satz 2.4.1 folgt, dass $\underline{M}_0$

über einer endlichen Körpererweiterung K_0 von $\kappa(\varepsilon)$ definiert ist.

6.1 Definition eines Modulschemas

Um ein Modulschema definieren zu können, müssen wir erst einen Funktor angeben, den das Schema darstellen soll. Dazu definieren wir einen kontravarianten Funktor.

Definition 6.1.1 (kontravarianter Funktor) [ML71, S.13] Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ zwei Kategorien mit Objekten X, Y von $\mathcal{C}$ bzw. X', Y' von $\mathcal{C}'$ und Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von $\mathcal{C}$ bzw. $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$ von $\mathcal{C}'$.
Dann ist ein *kontravarianter Funktor* $\mathrm{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ eine Vorschrift, die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $\mathrm{F}(X)$ von $\mathcal{C}'$ zuordnet und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ einen Morphismus $\mathrm{F}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}\big(\mathrm{F}(Y), \mathrm{F}(X)\big)$ zuordnet, so dass

$$\mathrm{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(X)}$$

für alle Objekte X und

$$\mathrm{F}(g \circ f) = \mathrm{F}(f) \circ \mathrm{F}(g)$$

für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und beliebige Objekte X, Y, Z gilt.

Jetzt können wir kontravariante Funktoren $\mathrm{F} : (\mathbb{F}_q\text{-Schemata}) \to (\text{Mengen})$ betrachten und das zugehörige Modulschema definieren.

Definition 6.1.2 (Modulschema) Sei $\mathrm{F} : (\mathbb{F}_q\text{-Schemata}) \to (\text{Mengen})$ ein kontravarianter Funktor. Falls ein $\mathbb{F}_q$-Schema X existiert, so dass ein natürlicher Isomorphismus τ von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q-Sch}(\cdot, X)$ nach F existiert, dann heißt X *Modulschema* von F.
In dieser Situation sagt man auch, dass (X, τ) den Funktor F *darstellt*.

Für solch einen Funktor existiert ein universelles Paar (U, e) genau dann, wenn F darstellbar ist.

Definition 6.1.3 (universelles Paar für F) Sei $\mathrm{F} : (\mathbb{F}_q\text{-Schemata}) \to (\text{Mengen})$ ein kontravarianter Funktor, U ein $\mathbb{F}_q$-Schema und $e \in \mathrm{F}(U)$. Dann heißt (U, e) *universell für* F, falls für alle Paare (X, x), bestehend aus einem $\mathbb{F}_q$-Schema X und einem Element $x \in \mathrm{F}(X)$, ein eindeutiger Morphismus von $\mathbb{F}_q$-Schemata $f : X \to U$ existiert, so dass

$\mathrm{F}(f) : \mathrm{F}(U) \to \mathrm{F}(X)$ durch $e \mapsto \mathrm{F}(f)(e) = x$ gegeben ist.
Das universelle Paar (U, e) ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, dass heißt, zu einem zweiten universellen Paar (U', e') existiert ein eindeutiger Isomorphismus mit $f : U \to U'$ mit $\mathrm{F}(f)(e') = e$.

Satz 6.1.4 Ist (U, e) universell für F und X ein $\mathbb{F}_q$-Schema, dann ist die natürliche Transformation $\tau_X : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q\text{-Sch}}(X, U) \to \mathrm{F}(X)$, die durch $f \mapsto \mathrm{F}(f)(e)$ gegeben ist, eine Darstellung (U, τ) von F.
Umgekehrt ist jede Darstellung von F von dieser Form.

6.2 Der Modulraum eines Anderson A-Motivs

In diesem Abschnitt betrachten wir den Funktor

$$\mathcal{X} : (\text{ Schemata über } C) \to (\text{Mengen}),$$

der durch

$$S \mapsto \left\{ \text{Isomorphieklassen } (\mathcal{F}, \tau) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ lokal freie Garbe von Rang 1 über } \tilde{C}_S \\ \quad \text{und partiellem Grad Null} \\ \quad \text{auf jeder Zusammenhangskomponente,} \\ \tau : \sigma^* \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}(D_\infty) \text{ mit lokal freiem Kokern über } S \\ \quad \text{von Rang } d \text{ und } \mathcal{I}'^d \cdot \operatorname{coker} \tau = (0) \end{array} \right\}$$

gegeben ist. Dabei ist D_∞ ein geeigneter Divisor und $\mathcal{I}'$ eine geeignete Idealgarbe, sowie $\tilde{C}$ die Kurve aus Bemerkung 3.4.2.
Wir zeigen in Abschnitt 6.2.2, dass für diesen Funktor ein Modulschema existiert und in Abschnitt 6.2.3, dass wir zu jedem Anderson A-Motiv $\underline{M}$ über $L = L^{alg}$ mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ ein Element $(\bar{\mathcal{M}}, \tau_{\bar{\mathcal{M}}})$ in $\mathcal{X}(L)$ assoziieren können.

6.2.1 Das Modulschema der invertierbaren Garben von partiellem Grad Null

Wir betrachten in diesem Abschnitt invertierbare Garben, also lokal freie Garben von Rang 1, und zeigen, dass diese durch ein $\mathbb{F}_q$-Schema J parametrisiert werden.

Definition 6.2.1 (partieller Grad) Sei die Abbildung

$$\deg_{\tilde{C}_\nu} : \{\text{invertierbare Garben}\} \to \mathbb{Z}$$

definiert durch $\deg_{\tilde{C}_\nu}(\mathcal{L}) := \deg(\mathcal{L}|_{\tilde{C}_\nu})$ für jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$.
Wir definieren die Zuordnung $\mathrm{pardeg}_{\mathrm{cc}}$ durch

$$\mathrm{pardeg}_{\mathrm{cc}} := (\deg_{\tilde{C}_\nu})_\nu : \{\text{invertierbare Garben}\} \to \mathbb{Z}^\#.$$

Nach [BLR90, S.199] bilden die Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf einem Schema $\tilde{C}_S$ eine abelsche Gruppe bezüglich des Tensorprodukts $\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}_S}}$. Diese Gruppe wird als absolute Picard-Gruppe $\mathrm{Pic}(\tilde{C}_S)$ bezeichnet.
Zu dem kontravarianten Funktor

$$\begin{aligned} P_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} : (\text{Schemata über } \mathbb{F}_q) \to & (\text{Mengen}) \\ S \mapsto & P_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}(S) := \mathrm{Pic}(\tilde{C}_S), \end{aligned}$$

definieren wir, wie in [BLR90, Kapitel 8], den relativen Picard-Funktor von $\tilde{C}$ über $\mathbb{F}_q$ als die zu dem Funktor $P_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ assoziierte Garbe $\mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$.

Nach [BLR90, Cor 9.2/13] besteht die Identitätskomponente, $\mathrm{Pic}^0_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$, von $\mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ aus den Elementen von $\mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$, die auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{C}_{\mathbb{F}}$ den partiellen Grad Null haben. Wir können daher die Identitätskomponente von $\mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ durch

$$\mathrm{Pic}^0_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} = \left\{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} \;\middle|\; \mathrm{pardeg}_{\mathrm{cc}}(\mathcal{L}) = 0\right\}$$

beschreiben.

Da der Morphismus $\tilde{C} \to \mathbb{F}_q$ projektiv, glatt und lokal endlich präsentiert ist und zusätzlich die geometrischen Fasern von $\tilde{C}$ reduziert sind, da $\tilde{C}$ geometrisch reduziert ist, gilt nach Theorem [BLR90, Thm 8.2/3] und Proposition [BLR90, Prop 9.2/3], dass $\mathrm{Pic}^0_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ durch ein Schema J über $\mathbb{F}_q$ darstellbar ist, welches projektiv und glatt ist.

Satz 6.2.2 Zu dem Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{F} : (\text{Schemata über } \mathbb{F}_q) \to & (\text{Mengen}) \\ S \mapsto & \big\{\text{Isomorphieklassen von invertierbaren} \\ & \quad \text{Garben } \bar{\mathcal{M}} \text{ auf } \tilde{C}_S \text{ mit } \mathrm{pardeg}_{\mathrm{cc}}(\bar{\mathcal{M}}) = 0\big\} \end{aligned}$$

existiert das Modulschema $(J, \bar{\mathcal{M}}^{univ})$. □

Dabei ist $\bar{\mathcal{M}}^{univ} \in \mathrm{F}(J)$ eine invertierbare Garbe von partiellem Grad Null auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{C}_J := \tilde{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} J$ und J ein $\mathbb{F}_q$-Schema, welches projektiv und glatt ist.

6.2.2 Die Darstellbarkeit von τ

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jedes Paar $(\mathcal{F}, \tau)$ der folgenden Form parametrisiert werden kann.

> $\mathcal{F}$ ist eine invertierbare Garbe von $\text{pardeg}_{\text{cc}}$ Null auf $\tilde{C}_S$ für ein Schema S.
>
> $\tau : \sigma^* \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}(D_\infty)$ ist ein injektiver Morphismus mit geeignetem Divisor D_∞.
>
> Es gilt $\mathcal{I}^d \cdot \operatorname{coker} \tau = (0)$ für eine geeignete Idealgarbe $\mathcal{I}$.
>
> Der Kokern von τ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_S$-Modul von Rang d.

Da wir in Abschnitt 6.2.1 das Modulschema der invertierbaren Garben auf $\tilde{C}_S$ bestimmt haben, lassen wir dieses Ergebnis einfließen und betrachten die universelle Garbe $\bar{\mathcal{M}}^{univ}$ als Garbe auf $\tilde{C}_J$.

Nun müssen wir angeben, wie die Garbe $\mathcal{I}$ definiert ist, und $\bar{\mathcal{M}}^{univ}$ und $\mathcal{I}$ gegebenenfalls kompatibel machen. Wir betrachten dazu

$$\begin{tikzcd} C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} (C \setminus \{\infty\}) \arrow[r, "c=pr"'] & C \setminus \{\infty\} \arrow[l, bend right, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"'] \end{tikzcd} .$$

Das Bild von $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ ist ein abgeschlossenes Unterschema, welches durch die Garbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}}$ gegeben ist.

Wir wissen, dass $\bar{\mathcal{M}}^{univ}$ auf $\tilde{C}_J$ lebt, $\mathcal{I}$ aber auf $C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$ definiert ist. Wir betrachten folgendes Diagramm, wobei g die Basiserweiterung $S \to J \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$ ist und die Abbildung $J \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} (C \setminus \{\infty\}) \to J$ durch die Projektion auf die erste Komponente gegeben ist.

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}_S \arrow[r, "(pr_1, g \circ pr_2)"] & \tilde{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} J \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} (C \setminus \{\infty\}) \arrow[r, "pr_{1,2}"] \arrow[d, "(\pi \circ pr_1, pr_3)"] & \tilde{C}_J \\ & C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} (C \setminus \{\infty\}) & \end{tikzcd}$$

Setzen wir $\mathcal{I}' := {}_{(\pi\circ pr_1, pr_3)^*}\mathcal{I}$ so sind $\mathcal{I}'$ und ${}_{pr_{1,2}^*}\mathcal{M}^{univ}$ über $\tilde{C}_{J\times(C\setminus\{\infty\})}$ definiert.

Wir suchen zunächst einen darstellbaren Funktor $\mathcal{H}$, der den Schemata über $J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} (C\setminus\{\infty\})$ Mengen von solchen Quotienten mit den gewünschenten Eigenschaften zuordnet, welche den an den Kokern von τ gestellten Anforderungen genügen.

Dazu wählen wir ganze Zahlen $n_i \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_i n_i = d$ und setzen $D_\infty := \sum_{i=1}^s n_i \tilde{\infty}_i$ für $\tilde{\infty}_i \in \tilde{\infty}_L = \{\tilde{\infty}_1, \ldots, \tilde{\infty}_s\}$ und $\underline{n} := (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$. Wir verwenden die vereinfachte Notation $\mathcal{F}_{\underline{n}} := {}_{(pr_1, g\circ pr_2)^*}\left({}_{pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum\limits_{i=1}^s n_i\cdot\tilde{\infty}_i)/\mathcal{I}'^d\cdot{}_{pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum\limits_{i=1}^s n_i\cdot\tilde{\infty}_i)\right)$.

Satz 6.2.3 Sei der Funktor

$$\mathcal{H}_{\underline{n}} : \left(\begin{smallmatrix}\text{lokal noethersche Schemata über}\\ J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q}(C\setminus\{\infty\})\end{smallmatrix}\right) \to (\text{Mengen}),$$

definiert durch

$$\begin{aligned}(S \xrightarrow{g} J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C\setminus\{\infty\}) \mapsto \Big\{(\mathcal{N}, \bar{\beta}) \;\Big|\; & \\ \mathcal{F}_{\underline{n}} \overset{\bar{\beta}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{N}\ & \text{Epimorphismus von } \mathcal{O}_{\tilde{C}_S}\text{-Moduln und} \\ & {}_{(\tilde{C}_S \xrightarrow{pr_2} S)_*}\mathcal{N} \text{ lokal freie Garbe auf } S \text{ von Rang d}\Big\}.\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{H}_{\underline{n}}$ darstellbar durch ein Schema

$$H_{\underline{n}} := \operatorname{Quot}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}|J\times C\setminus\{\infty\})}$$

und einen universellen Quotienten $(\mathcal{N}^{univ}, \bar{\beta}^{univ})$ auf $\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}$.

Beweis: Wir setzen $\mathcal{F}'_{\underline{n}} := \left({}_{pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum\limits_{i=1}^s n_i\cdot\tilde{\infty}_i)/\mathcal{I}'^d\cdot{}_{pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum\limits_{i=1}^s n_i\cdot\tilde{\infty}_i)\right)$, das heißt $\mathcal{F}_{\underline{n}} = {}_{(pr_1, g\circ pr_2)^*}\mathcal{F}'_{\underline{n}}$. Die Garbe $\mathcal{F}'_{\underline{n}}$ ist nach Konstruktion eine kohärente Garbe und $\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}$ ist noethersch und projektiv über $J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C\setminus\{\infty\}$.

Nach [Gro62, n°221, §3] definieren wir für das projektive $J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q}(C\setminus\{\infty\})$-Schema $\tilde{C}_{J\times(C\setminus\{\infty\})}$ und den kohärenten $\mathcal{O}_{\tilde{C}_S}$-Modul $\mathcal{F}_{\underline{n}}$ die Menge $\operatorname{Quot}(\mathcal{F}_{\underline{n}}|\tilde{C}_S|S)$ der kohärenten Quotienten von $\mathcal{F}_{\underline{n}}$, die flach über S sind. Der kontravariante Funktor

$$\operatorname{Quot}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times(C\setminus\{\infty\}}|J\times(C\setminus\{\infty\}))} : \left(\begin{smallmatrix}\text{lokal noethersche Schemata über}\\ J\times(C\setminus\{\infty\})\end{smallmatrix}\right) \to (\text{Mengen}),$$

der ein $J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q}(C\setminus\{\infty\})$-Schema S auf die Menge der Quotienten $\operatorname{Quot}(\mathcal{F}_{\underline{n}}|\tilde{C}_S|S)$ schickt, ist nach [Gro62, n°221, Thm 3.1] darstellbar durch ein $J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q}(C\setminus\{\infty\})$-Schema $\operatorname{Quot}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times(C\setminus\{\infty\})}|J\times(C\setminus\{\infty\}))}$, welches die disjunkte Vereinigung von projektiven $J\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q}(C\setminus\{\infty\})$-Schemata ist. □

Betrachten wir die disjunkte Vereinigung näher, so sehen wir, dass das Schema $H_{\underline{n}}$ projektiv über $J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} (C \setminus \{\infty\})$ ist.

Lemma 6.2.4 Das Schema $H_{\underline{n}}$ aus Satz 6.2.3 ist projektiv und insbesondere von endlichem Typ über $J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$.

Beweis: Nach [Gro62, n°221, §3] wissen wir, dass wir $H_{\underline{n}}$ in Unterfunktoren

$$\mathrm{Quot}^{P}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}|J\times C\setminus\{\infty\})}$$

zerlegen, wobei die Unterfunktoren $\mathrm{Quot}^{P}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}|J\times C\setminus\{\infty\})}$ die Quotienten von $\mathcal{F}'_{\underline{n}}$ sind, die das Hilbertpolynom P haben. $H_{\underline{n}}$ ist genau dann darstellbar, wenn alle $\mathrm{Quot}^{P}_{(\mathcal{F}'_{\underline{n}}|\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}|J\times C\setminus\{\infty\})}$ darstellbar sind.
Es gilt weiterhin, dass $\mathcal{F}'_{\underline{n}}$ eine kohärente Garbe ist, $\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}$ noethersch und projektiv über $J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$ ist und $S \to J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$ eine Basiserweiterung ist, aus der $X' := \tilde{C}_S$ und $\mathcal{F}_{\underline{n}} = {}_{(\tilde{C}_S \to \tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}})^*}\mathcal{F}'_{\underline{n}}$ entstehen. Wir wählen nun ein $s \in S$ und berechnen das Hilbertpolynom

$$\mathrm{P}_{\mathcal{F}_{\underline{n}}|X'|S;s}(n) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_{\kappa(s)} H^i(X'_s, \mathcal{F}'_s(n)).$$

Dabei definieren wir $\mathcal{F}'_s(n) := \mathcal{F}'_s \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n)$ und $I' := (a \otimes 1 - 1 \otimes \bar{\gamma}(a))$ für $\bar{\gamma} : A \to \kappa(s)$ und $\mathcal{F}'_s := {}_{(pr_1, g\circ pr_2)^* pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum_{i=1}^{s} n_i \cdot \tilde{\infty}_i) / I'^d{}_{(pr_1, g\circ pr_2)^* pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum_{i=1}^{s} n_i \cdot \tilde{\infty}_i)$.
Da I' als Nullstellenmenge eine Punktmenge $\{x\} \subset \tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}$ hat, gilt in der Umgebung von x, dass $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(n)$ isomorph zu $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ ist. Damit ist dort $\mathcal{F}'_s(n) = \mathcal{F}'_s$. Außerhalb der Umgebung gilt $1 \in I'$ und damit ist dort $\mathcal{F}'_s = (0)$ und somit auch $\mathcal{F}'_s(n) = (0)$. Es gilt also

$$\mathcal{F}'_s(n) = \mathcal{F}'_s \text{ für alle } n.$$

Nun folgt mit [Har97, Ex II.1.19, Lemma III.2.10, Prop III.2.7] $H^i\big(X'_s, \mathcal{F}'_s(n)\big) = (0)$ für alle $i > 0$ und $H^0\big(X'_s, \mathcal{F}'_s\big) = \mathcal{F}'_s$ als $\kappa(s)$-Vektorraum.
Das Hilbertpolynom

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathcal{F}'|X'|S;s}(n) &= \dim_{\kappa(s)} H^0(X'_s, \mathcal{F}'_s)\\ &= d\end{aligned}$$

ist konstant für alle n, da $\mathcal{F}'_s$ ein lokal freier $\mathcal{O}_S$-Modul von Rang d ist.
Es folgt mit [Gro62, n°221, Thm 3.2], dass $H_{\underline{n}}$ ein projektives Schema ist und damit insbesondere von endlichem Typ ist. $\square$

Betrachten wir nun die zu Beginn des Abschnitts genannten Forderungen an $(\mathcal{F},\tau)$ beziehungsweise $(\bar{\mathcal{M}}^{univ},\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}})$, so wissen wir nach Satz 6.2.3, sobald wir $\operatorname{coker}(\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}) = \mathcal{N}$ setzen, dass die Paare $(\bar{\mathcal{M}}^{univ},\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}})$ mit den nachfolgenden Eigenschaften parametrisiert werden können.

${}_{(pr_1,g\circ pr_2)^* pr_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}$ ist eine invertierbare Garbe auf $\tilde{C}_S$ von Rang 1 und $\operatorname{pardeg}_{\mathrm{cc}}(\bar{\mathcal{M}}^{univ}) = 0$.

$\mathcal{I}'^d \cdot \operatorname{coker}(\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}) = (0)$.

Der Kokern von $\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_S$-Modul von Rang d.

Wir erhalten also nach Satz 6.2.3 einen Morphismus $h_{\underline{n}} : S \to H_{\underline{n}}$, so dass $\mathcal{H}_{\underline{n}}(H_{\underline{n}}) \to \mathcal{H}_{\underline{n}}(S)$ durch

$$(\mathcal{N}^{univ},\bar{\beta}^{univ}) \mapsto \mathcal{H}_{\underline{n}}(h_{\underline{n}})\big((\mathcal{N}^{univ},\bar{\beta}^{univ})\big) = \big(\operatorname{coker}(\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}), \mathcal{F}_{\underline{n}} \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}})\big)$$

gegeben ist.

Um die letzte Anforderung an $(\bar{\mathcal{M}}^{univ},\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}})$ parametrisieren zu können, müssen wir die Injektion $\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}} : \sigma^*\bar{\mathcal{M}}^{univ} \to \mathcal{M}^{univ}(D_\infty)$ definieren und parametrisieren. Dazu betrachten wir die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\beta^{univ} \arrow[r, "\alpha^{univ}"] & {}_{(\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty) \arrow[r, "\beta^{univ}"] \arrow[d] & \mathcal{N}^{univ} \arrow[r] & 0 \\
& & {}_{(\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}\to\tilde{C}_J)^*}\Big(\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty) \,/\, \mathcal{I}'^d \cdot \bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty)\Big) \arrow[ur, two heads, "\bar{\beta}^{univ}"'] & &
\end{tikzcd} \tag{6.2.1}$$

und erhalten eine injektive Abbildung

$$\alpha^{univ} : \mathcal{M}' := \ker\beta^{univ} \to {}_{(\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty).$$

Dann haben wir auf $\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}$ die Garben ${}_{(\tilde{C}_{H_{\underline{n}}}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}$, $\mathcal{N}^{univ}$ und $\mathcal{M}'$ gegeben. $\mathcal{M}'$ ist als Kern von β^{univ} eine lokal freie Garbe von Rang 1 und entspricht einem Morphismus $m' : H_{\underline{n}} \to \operatorname{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} \supseteq \operatorname{Pic}^0_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$.

Es bleibt also zu zeigen, dass ein Schema $X_{\underline{n}}$ existiert, so dass

$$
{}_{(\tilde{c}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{c}_{H_{\underline{n}}})^*}\mathcal{M}' \cong \sigma^* {}_{(\tilde{c}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{c}_{J})^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}
$$

gilt. Denn wenn wir diesen Isomorphismus mit α^{univ} verknüpfen, so erhalten wir den gewünschten Monomorphismus $\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}$.
Dazu zeigen wir, dass das Faserprodukt $X_{\underline{n}} := J \times_{J \times \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}} H_{\underline{n}}$ unser gesuchtes Schema $X_{\underline{n}}$ ist. Die Abbildung $H_{\underline{n}} \to J \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q} \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ ist dabei durch $\pi_1 := (pr, m')$ und die Abbildung $J \to J \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q} \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}$ durch $\pi_2 := (\mathrm{id}, \mathrm{Frob}_q)$ gegeben.

Korollar 6.2.5 Sei $\mathcal{X}_{\underline{n}}$ der Funktor

$$
\mathcal{X}_{\underline{n}} : (\text{Schemata über } C) \to (\text{Mengen}),
$$

der durch

$$
\begin{aligned}
S \mapsto \big\{ &\text{Isomorphieklassen } (\mathcal{F}, \tau) \;\big|\; \\
&\mathcal{F} \text{ ist eine lokal freie Garbe von Rang 1 und } \mathrm{pardeg}_{\mathrm{cc}}(\mathcal{F}) = 0 \text{ auf } \tilde{C}_S, \\
&\tau : \sigma^*\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}\Big(\sum_i n_i \cdot \tilde{\infty}_i\Big) \text{ ist injektiv mit lokal freiem Kokern} \\
&\mathrm{coker}(\tau) \text{ über } S \text{ von Rang } d \text{ und } \mathcal{I}'^d \cdot \mathrm{coker}(\tau) = (0) \big\}.
\end{aligned}
$$

gegeben ist. Dann stellt $X_{\underline{n}} := J \times_{J \times \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}} H_{\underline{n}}$ den Funktor $\mathcal{X}_{\underline{n}}$ mit universellem $(\mathcal{M}^{univ}, \tau^{univ}) \in \mathcal{X}_{\underline{n}}(X_{\underline{n}})$ dar.

Beweis: Wir betrachten das Faserprodukt $X_{\underline{n}}$, welches durch das folgende Diagramm definiert ist.

$$
\begin{tikzcd}
X_{\underline{n}} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & J \arrow[d, "\pi_2 = (\mathrm{id}, \mathrm{Frob}_q)"] & & \bar{\mathcal{M}}^{univ} \arrow[d, mapsto] \\
 & & & (\bar{\mathcal{M}}^{univ}, \sigma^*\bar{\mathcal{M}}^{univ}) \\
H_{\underline{n}} \arrow[r, "\pi_1 = (pr, m')"'] & J \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q} \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} & (\text{Punkt auf } H_{\underline{n}}) \arrow[r, mapsto] & (\bar{\mathcal{M}}^{univ}, \mathcal{M}')
\end{tikzcd}
$$

Nach Definition des Faserprodukts gilt $\pi_1 \circ pr_1 = \pi_2 \circ pr_2$. Insbesondere gilt $m' \circ pr_1 = \mathrm{Frob}_{q/J} \circ pr_2$. Dies gilt genau dann, wenn $\sigma^* {}_{(\tilde{c}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{c}_{J})^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}$ und ${}_{(\tilde{c}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{c}_{H_{\underline{n}}})^*}\mathcal{M}'$

isomorph sind. Verknüpfen wir nun diesen Isomorphismus mit α^{univ}, so erhalten wir den gewünschten injektiven Morphismus

$$\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}} := \sigma^*{}_{(\tilde{C}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ} \longrightarrow {}_{(\tilde{C}_{H_{\underline{n}}} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum_i n_i \cdot \tilde{\infty}_i).$$

Da β^{univ} durch ${}_{(\tilde{C}_{X_{\underline{n}}} \to \tilde{C}_J)^*}\big(\bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum_i n_i \cdot \tilde{\infty}_i) \;/\; \mathcal{I}'^d \cdot \bar{\mathcal{M}}^{univ}(\sum_i n_i \cdot \tilde{\infty}_i)\big)$ faktorisiert, wird der Kokern von $\tau_{\bar{\mathcal{M}}^{univ}}$ duch $\mathcal{I}'^d$ annulliert.
Wie wir in Satz 6.2.2 beziehungsweise Satz 6.2.3 gesehen haben, werden die verbleibenden Anforderungen an das Paar $(\mathcal{F}, \tau)$ schon durch J beziehungsweise $H_{\underline{n}}$ parametrisiert. □

Wir erhalten somit für $(\mathcal{F}, \tau)$ einen Morphismus $x_{\underline{n}} : S \to X_{\underline{n}}$, so dass die Abbildung $\mathcal{X}_{\underline{n}}(x_{\underline{n}}) : \mathcal{X}_{\underline{n}}(X_{\underline{n}}) \to \mathcal{X}_{\underline{n}}(S)$ durch $\mathcal{X}_{\underline{n}}(x_{\underline{n}})((\mathcal{M}^{univ}, \tau^{univ})) = (\mathcal{F}, \tau)$ gegeben ist. Damit haben wir das Paar $(\mathcal{F}, \tau)$ parametrisiert.

Fassen wir nun die möglichen Wahlen der n_i zusammen, so definieren wir allgemeiner $\mathcal{X}$ als die disjunkte Vereinigung der Funktoren $\mathcal{X}_{\underline{n}}$,

$$\mathcal{X} := \bigcup_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^s \\ \sum n_i = d}} \mathcal{X}_{\underline{n}}.$$

Dieser Funktor wird durch

$$X := \bigcup_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^s \\ \sum n_i = d}} X_{\underline{n}}$$

entsprechend dargestellt. Setzen wir zusätzlich

$$H := \bigcup_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^s \\ \sum n_i = d}} H_{\underline{n}},$$

so gilt weiterhin $X = J \times_{J \times \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}} H$.

6.2.3 Der Modulraum für Anderson A-Motive

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass wir zu jedem Anderson A-Motiv $\underline{M}$ ein Element $(\bar{\mathcal{M}}, \tau_{\bar{\mathcal{M}}})$ aus $\mathcal{X}(L)$ assoziieren können. Sei dazu $\underline{M}$ ein halbeinfaches Anderson A-Motiv über $L = L^{alg}$ mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. In Abschnitt 3.4 haben wir zu jedem Anderson A-Motiv eine lokal freie Garbe von Rang 1 auf $\tilde{C}_L$ konstruiert und wir zeigen nun dass diese Garbe auf jeder Zusammenhangskomponente den partiellen Grad Null hat.

Lemma 6.2.6 Zu jedem halbeinfachen Anderson A-Motiv $\underline{M}$ existiert eine lokal freie Garbe $\mathcal{M}$ von Rang 1 auf $\tilde{C}_L$, die auf jeder Zusammenhangskomponente $\tilde{C}_{L,\nu}$ von $\tilde{C}_L$ den Grad Null hat.

Beweis: Sei $\bar{\mathcal{M}}$ die lokal freie Garbe auf $\tilde{C}_L$ von Rang 1 aus Lemma 3.4.3. Wir wählen auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{C}_L$ ein $\tilde{\infty}_{i_\nu,L} \in \tilde{\infty}_L$ fest. Da $L \supseteq \mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen ist, gilt $\deg(\tilde{\infty}_{i_\nu}) = 1$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}(D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}})$ die Garbe zum Divisor $D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}} := \big(-\deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\bar{\mathcal{M}})\big) \cdot (\tilde{\infty}_{i_\nu,L})$, die für eine offene Teilmenge $U \subseteq \tilde{C}_L$ durch $\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}(D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}})(U) := \big\{f \in L(\tilde{C}_L)^x \;\big|\; \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}}) \geq 0 \text{ für alle } P \in U\big\} \cup \{0\}$ definiert ist. Nun setzen wir

$$\mathcal{M} := \bar{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}\big(\sum_\nu D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}}\big).$$

Da $\mathcal{M}$ und $\bar{\mathcal{M}}$ sich nur in $\tilde{\infty}_L$ unterscheiden, können wir die Überdeckung aus Lemma 3.4.3 nehmen, um zu sehen, dass $\mathcal{M}$ lokal frei von Rang 1 ist. Außerdem folgt, da beide Garben auf $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$ übereinstimmen, dass $\Gamma\big(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}, \mathcal{M}\big) = M$ gilt.
Nun betrachten wir den partiellen Grad der Garbe auf $\tilde{C}_{L,v}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\mathcal{M}) &= \deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}\big(\bar{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}(\sum_\nu D_{\tilde{\infty}_{i_\nu,L}})\big) \\
&= \deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\bar{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}) + \big(-\deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\bar{\mathcal{M}}) \cdot \mathrm{rk}(\bar{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{L}})\big) \\
&= \deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\bar{\mathcal{M}}) - \deg_{\tilde{C}_{L,\nu}}(\bar{\mathcal{M}}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Nach Abschnitt 6.2.1 wissen wir nun, dass zu L und $\mathcal{M}$ ein nicht eindeutig bestimmter Morphismus $f : \operatorname{Spec} L \to J$ existiert, so dass $\mathrm{F}(f) : \mathrm{F}(J) \to \mathrm{F}(\operatorname{Spec} L)$ durch $\bar{\mathcal{M}}^{univ} \mapsto \mathrm{F}(f)(\bar{\mathcal{M}}^{univ}) = \mathcal{M}$ definiert ist.

Korollar 6.2.7 Sei $\underline{M}$ ein halbeinfaches Anderson A-Motiv mit komplexer Multiplikation durch $\mathcal{O}_\mathrm{E}$. Dann existiert eine nicht eindeutige Abbildung $f : \operatorname{Spec} L \to X$ mit

$$\underline{M} \cong \big(\Gamma\left(\operatorname{Spec} A_L, {}_{\pi_*(\mathrm{id}_{\tilde{C}} \times f)^*}\mathcal{M}\right), {}_{\pi_*(\mathrm{id}_{\tilde{C}} \times f)^*}\tau_{\mathcal{M}}\big)$$

für $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{X}(L)$.

Beweis: In Lemma 6.2.6 haben wir zu dem Anderson A-Motiv eine Garbe $\mathcal{M}$ konstruiert, deren globaler Schnitt wieder der A_L-Modul M ist. Nun konstruieren wir aus dem Modulhomomorphismus τ_M die Abbildung $\tau_{\mathcal{M}}$ der Garben, so dass das Paar $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ in $\mathcal{X}(L)$ liegt.
Nach Korollar 3.3.6 ist $\underline{M}$ ein τ-Modul von Rang 1 über $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Betrachten wir den injektiven $\mathcal{O}_{\mathrm{E,L}}$-Homomorphismus $\tau_M : \sigma^* M \to M$ bei $\tilde{\infty}_{i,L}$, so hat er dort einen Pol oder eine Nullstelle bezüglich des Gitters $\mathcal{M}$. Wir setzen $n_i \in \mathbb{Z}$ als die Ordnung des Pols bei $\tilde{\infty}_{i,L}$. Das bedeutet, dass ein Homomorphismus

$$\tau_{\mathcal{M}} : \sigma^* \mathcal{M} \to \mathcal{M}\Big(\sum_{i=1}^{s} n_i \cdot \tilde{\infty}_{i,L}\Big) := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}}\Big(\sum_{i=1}^{s} n_i \cdot \tilde{\infty}_{i,L}\Big)$$

existiert. Dabei sind die n_i so definiert sind, dass der Kokern von $\tau_{\mathcal{M}}$ bei $\tilde{\infty}_L$ verschwindet. Also gilt

$$\operatorname{coker} \tau_{\mathcal{M}} = \operatorname{coker} \tau_M.$$

Da nach Definition des Anderson A-Motivs der Kokerns von τ_M ein d-dimensionaler L-Vektorraum ist und zusätzlich $\deg\Big(\mathcal{M}\big(\sum_{i=1}^{s} n_i \cdot \tilde{\infty}_{i,L}\big) \;/\; \sigma^* \mathcal{M}\Big) = \sum_{i=1}^{s} n_i$ gilt, folgt $\sum_{i=1}^{s} n_i = d$. Damit ist $\tau_{\mathcal{M}}$ unsere gewünschte Abbildung und wir haben das Paar $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ aus $\underline{M}$ konstruiert. Nach Korollar 6.2.5 liefert $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ ein Element von $\mathcal{X}_{\underline{n}}(L)$, das heißt einen nicht eindeutig bestimmten Morphismus $f : \operatorname{Spec} L \to X_{\underline{n}} \subset X$. $\square$

Die Konstruktion ist nicht kanonisch, da $\mathcal{M}$ von verschiedenen Wahlen abhing.

6.3 Der Modulraum für Anderson A-Motive ist endlich

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, dass jedes halbeinfache CM-Anderson A-Motiv (M, τ_M) über einer endlichen Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$ beziehungsweise von Q definiert ist. Dazu haben wir im letzten Abschnitt das Modulschema X der assoziierten Garbe $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ konstruiert.
Wir fixieren die Charakteristik $\varepsilon = \ker(\gamma)$ und setzen $K := \kappa(\varepsilon)^{alg}$ für einen algebraischen Abschluss von $\kappa(\varepsilon) := \mathrm{Quot}(A/\varepsilon)$ mit $\rho : A \to A \setminus \varepsilon \subseteq K$. Um zu zeigen, dass $\underline{M}$ über K definiert ist, betrachten wir $X_\varepsilon := X \times_{C \setminus \{\infty\}} \operatorname{Spec} K$, die Basiserweiterung von X.

Können wir zeigen, dass eine offene Teilmenge von X_ε, die endlich über K ist, ausreicht um $(\mathcal{M}, \tau_\mathcal{M})$ wie gefordert zu definieren beziehungsweise, dass X_ε selbst endlich über K ist, so folgt mit Satz 6.3.6 das gewünschte Ergebnis.

Wir zeigen, dass zu jedem Punkt $Q \in X_\varepsilon$ eine offene, affine Umgebung $\mathcal{W}$ mit $Q \in \mathcal{W} \subseteq X_\varepsilon$ existiert, die endlich über K ist.
Dazu betrachten wir das Ideal $\mathcal{I}'$ aus Abschnitt 6.2.2, welches auf $\tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}}$ definiert ist. Wir wollen $\mathcal{I}'$ auf X_ε auffassen können. Wir betrachten das Bild von $(\operatorname{Spec}\rho, \mathrm{id})$ in $C \setminus \{\infty\} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} K$.

$$\begin{tikzcd} C \setminus \{\infty\} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} K \arrow[d, shift right] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[u, bend right, "(\operatorname{Spec}\rho,\mathrm{id})"'] \end{tikzcd}$$

Das Bild von $(\operatorname{Spec}\rho, \mathrm{id})$ ist ein Punkt in $\operatorname{Spec} A_K = C_K \setminus \{\infty_K\}$, nämlich der Kern der Abbildung $A_K \to K$, $a \otimes b \mapsto \gamma(a) \cdot b$.
Betrachten wir nun dieses Ideal auf der Kurve $\tilde{C}_K$, so wissen wir, dass es durch eine Idealgarbe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}_K}$ gegeben ist.
Weiter wissen wir, dass $\Gamma(\tilde{C}_K \setminus \{\tilde{\infty}_K\}, \mathcal{O}_{\tilde{C}_K}) = \mathcal{O}_\mathrm{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} K$ eine direkte Summe von Dedekindringen ist. Nach [Bou72, VII §3] existiert eine eindeutige Zerlegung der Faktoren von $\mathcal{J}^d = \prod_v \mathcal{J}_v$ in ein endliches Produkt von Primidealpotenzen, das heißt es gilt

$$\mathcal{J}_v = \mathfrak{p}_1^{f_{1,v}} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_t^{f_{t_v,v}},$$

für jedes $\mathcal{J}_v$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von $\mathcal{O}_{\tilde{C}_K}$ und deren Potenzen $f_{i,v}$. Wir können somit $\mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \mathcal{J}^d = \mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \prod_v \mathcal{J}_v = \mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$ mit Potenzen $e_i := \sum_v f_{i,v}$ schreiben.
Wenden wir auf $\mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$ den chinesischen Restsatz an, so erhalten wir

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \mathcal{J}^d = \prod_i \mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \mathfrak{p}_i^{e_i}. \tag{6.3.1}$$

Die Faktoren können wir wie folgt umschreiben:

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}_K} / \mathfrak{p}_i^{e_i} \cong \widehat{\mathcal{O}_{\tilde{C}_K,\mathfrak{p}_i}} / \mathfrak{p}_i^{e_i} \cong K[[w_i]] / w_i^{e_i} \tag{6.3.2}$$

Die erste Isomorphie gilt wegen der Definition von Vervollständigung und die zweite, da w_i ein uniformisierender Parameter auf $\tilde{C}_K$ bei $\mathfrak{p}_i$ ist und $K = \kappa(\mathfrak{p}_i)$ gilt, da K algebraisch abgeschlossen ist.

Ziehen wir mit $pr_2 : X_\varepsilon \to \operatorname{Spec} K$ das Ideal $\mathcal{J}^d$ auf X_ε zurück, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{C}_{X_\varepsilon}} / {}_{(\tilde{C}_{X_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathcal{J}^d &\overset{(6.3.1)}{=} \prod_i \mathcal{O}_{\tilde{C}_{X_\varepsilon}} / (\mathfrak{p}_i \mathcal{O}_{\tilde{C}_{X_\varepsilon}})^{e_i} \\ &\overset{(6.3.2)}{\cong} \prod_i \mathcal{O}_{X_\varepsilon} \otimes_K K[[w_i]] / w_i^{e_i} \\ &= \prod_i \mathcal{O}_{X_\varepsilon}[[w_i]] / w_i^{e_i}. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Sei $H_\varepsilon := H \times_{C \setminus \{\infty\}} \operatorname{Spec} K$ als Faserprodukt definiert durch

$$\begin{tikzcd} H_\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d, "pr_2 \circ g"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\operatorname{Spec} \rho"'] & C \setminus \{\infty\} \end{tikzcd} ,$$

wobei g die Abbildung ist, durch die H als $J \times C \setminus \{\infty\}$-Schema gegeben ist.
Außerdem sei J_ε definiert durch

$$\begin{aligned} J_\varepsilon := & J \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\} \times_{C \setminus \{\infty\}} \operatorname{Spec} K \\ = & J \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} \operatorname{Spec} K. \end{aligned}$$

Dann können wir analog zu (6.3.3) auf X_ε auch für J_ε und für H_ε die Isomorphien

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}} / {}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathcal{J}^d \cong \prod_i \mathcal{O}_{J_\varepsilon}[[w_i]] / w_i^{e_i} \tag{6.3.4}$$

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}_{H_\varepsilon}} / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathcal{J}^d \cong \prod_i \mathcal{O}_{H_\varepsilon}[[w_i]] / w_i^{e_i} \tag{6.3.5}$$

bestimmmen.

Bezeichnen wir nun mit D_∞ den Divisor $\sum_i n_i \tilde{\infty}_i$ und mit $\mathcal{N}_\varepsilon$ die Garbe ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_H)^*}\mathcal{N}^{univ}$ auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$, so können folgendes Lemma formulieren.

Lemma 6.3.1 Wir können die Abbildung

$$\bar{\beta} : {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_{J \times C \setminus \{\infty\}})^*}\left({}_{\mathrm{pr}_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; \mathcal{I}'^d{}_{\mathrm{pr}_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \right) \twoheadrightarrow \mathcal{N}_\varepsilon$$

auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$ durch die Abbildung

$$\bigoplus_i {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; \mathfrak{p}_i^{e_i}{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \twoheadrightarrow \bigoplus_i \mathcal{N}_\varepsilon \;/\; \mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon$$

charakterisieren.

Beweis: Auf $\tilde{C}_H$ haben wir in Abschnitt 6.2.2 die exakte Sequenz (6.2.1)

$$0 \to \mathcal{M}' \xrightarrow{\alpha^{univ}} {}_{(\tilde{C}_H \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty) \xrightarrow{\beta^{univ}} \mathcal{N}^{univ} \to 0$$

erhalten, wobei β^{univ} durch ${}_{(\tilde{C}_H \to \tilde{C}_J)^*}\left(\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty)/\mathcal{I}'^d \cdot \bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty)\right)$ faktorisiert.
Da $\mathcal{N}^{univ}$ durch $\mathcal{I}'^d$ annulliert wird, gilt $\mathcal{N}^{univ} \cong \mathcal{N}^{univ} \; / \; \mathcal{I}'^d\mathcal{N}^{univ}$. Auf $\tilde{C}_H$ sieht $\bar{\beta}^{univ}$ somit wie folgt aus

$${}_{(\tilde{C}_H \to \tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}})^*}\left({}_{\mathrm{pr}_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty)/\mathcal{I}'^d{}_{\mathrm{pr}_{1,2}^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty)\right) \overset{\bar{\beta}^{univ}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{N}^{univ} \; / \; {}_{(\tilde{C}_H \to \tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}})^*}\mathcal{I}'^d\mathcal{N}^{univ}.$$

Wir betrachten $\bar{\beta}$ nun auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$ und da ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_{J\times C\setminus\{\infty\}})^*}\mathcal{I}' \cong {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathcal{J}$ gilt, können wir $\bar{\beta}$ wie folgt formulieren.

$$\bar{\beta} : {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty) \; / \; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\mathcal{J}^d{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}^{univ}(D_\infty) \twoheadrightarrow \mathcal{N}_\varepsilon \; / \; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathcal{J}^d\mathcal{N}_\varepsilon$$

Dann folgt mit (6.3.1) die Behauptung. □

Mit Hilfe des letzten Lemmas können wir zu jedem Punkt auf H_ε eine Umgebung finden, die lokal isomorph zu einer Umgebung auf J_ε ist.

Satz 6.3.2 Zu jedem $Q \in H_\varepsilon$ existieren offene Teilmengen $V \subseteq H_\varepsilon$ mit $Q \in V$ und $V'' \subseteq J_\varepsilon$, so dass ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V''$ existiert, also H_ε lokal isomorph zu J_ε ist.

Beweis: Betrachten wir die lokal freie Garbe ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}$ von Rang 1 auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$, so existiert eine offene Überdeckung U_j von $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$ mit ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}|_{U_j} \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}_{H_\varepsilon}}|_{U_j}$.
Sei P ein Punkt aus J_ε und sei $i \in \{1, \ldots, t\}$ fest gewählt mit $\mathfrak{p}_i \in \tilde{C}(K)$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_i$ aus der Darstellung von $\mathcal{J}^d$. Wir wählen nun eine offene, affine Umgebung V' von $(\mathfrak{p}_i, P) \in \tilde{C}_{J_\varepsilon}$ derart, dass $\delta : {}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}|_{V'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}}|_{V'}$ ein Isomorphismus ist.
Dann ist auch der Isomorphismus

$${}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \; / \; {}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)|_{V'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}} / {}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}}|_{V'} \tag{6.3.6}$$

durch δ gegeben.
Unter der Abbildung $(\mathfrak{p}_i, \mathrm{id}) : J_\varepsilon \to \tilde{C}_K \times_{\mathrm{Spec}\, K} J_\varepsilon$ betrachten wir nun das Urbild von V' in J_ε und erhalten so eine Umgebung $V'' := (\mathfrak{p}_i, \mathrm{id})^{-1}(V') \subseteq J_\varepsilon$ von P, so dass durch (6.3.6) auch ein Isomorphismus

$${}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)/{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)|_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}(V'')} \xrightarrow{\delta_i} \mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}}/{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{O}_{\tilde{C}_{J_\varepsilon}}|_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}(V'')}$$

gegeben ist, da ${}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}}(V'')$ und V' auf dem Schnitt mit $\{\mathfrak{p}_i\} \times J_\varepsilon$ übereinstimmen.
Wenden wir den Isomorphismus (6.3.4) auf das Bild von δ_i an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\delta_i\Big({}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; {}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\,{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)|_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}(V'')}\Big) \\
&= \mathcal{O}_{J_\varepsilon}[[w_i]]/w_i^{e_i}|_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}(V'')} \\
&= \mathcal{O}_{V''}[[w_i]]/w_i^{e_i}
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Nun zeigen wir, dass lokal eine Bijektion zwischen H_ε und J_ε existiert.
Dazu setzen wir das Urbild von V'' in H_ε als $V := {}_{(H_\varepsilon \to J_\varepsilon)^{-1}}(V'') \subseteq H_\varepsilon$. Es gilt auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$

$${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to H_\varepsilon)^{-1}}(V) = {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_{J_\varepsilon})^{-1}}\,{}_{(\tilde{C}_{J_\varepsilon} \to J_\varepsilon)^{-1}}(V''). \tag{6.3.8}$$

Die Existenz der Abbildung

$$\alpha : V \longrightarrow V''$$

folgt direkt aus der Definition von H. Wir ordnen dem Quotienten $(\mathcal{N}, \bar{\beta})$ die zugehörige Garbe $\bar{\mathcal{M}}$ auf J zu.
Die Abbildung α^{-1} werden wir im Folgenden erläutern, indem wir für jede invertierbare Garbe auf J_ε einen universellen Quotienten konstruieren. Dazu betrachten wir die auf $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$ gegebenen Garben

$${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\,{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)$$

und

$${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_H)^*}\big(\mathcal{M}' \;/\; \mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{M}'\big)$$

lokal auf der Umgebung ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to H_\varepsilon)^{-1}}(V)$ und erhalten so mit (6.3.7) und (6.3.8)

$$\begin{aligned}
&{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\,{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)|_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to H_\varepsilon)^{-1}(V)} \\
&\cong {}_{(H_\varepsilon \to J_\varepsilon)^*}\mathcal{O}_{V''}[[w_i]]/w_i^{e_i} \\
&\cong \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i}.
\end{aligned}$$

Das gleiche Argument liefert für ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_H)^*}\mathcal{M}'$ den Isomorphismus

$${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_H)^*}\big(\mathcal{M}' \;/\; \mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{M}'\big)|_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to H_\varepsilon)^{-1}(V)} \cong {}_{(H_\varepsilon \to J_\varepsilon)^*}\mathcal{O}_{V''}[[w_i]]/w_i^{e_i}. \tag{6.3.9}$$

Nach Lemma 6.3.1 können wir den Quotienten $(\mathcal{N}, \bar{\beta})$ bezüglich der einzelnen $\mathfrak{p}_i$ charakterisieren. Wir betrachten nun

$$\bar{\beta} : {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \;/\; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\,{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \twoheadrightarrow \mathcal{N}_\varepsilon / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon} \to \tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon$$

auf dem Urbild von V in $\tilde{C}_{H_\varepsilon}$

$$\left({}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty)\right)\Big|_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to H_\varepsilon)^{-1}(V)} \twoheadrightarrow \left(\mathcal{N}_\varepsilon / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon\right)\Big|_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to H_\varepsilon)^{-1}(V)}.$$

So erhalten wir mit den vorangegangenen Überlegungen

$$\mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i} \twoheadrightarrow \left(\mathcal{N}_\varepsilon \;/\; {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon\right)\Big|_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to H_\varepsilon)^{-1}(V)}. \tag{6.3.10}$$

Mit (6.3.9) und (6.3.10) können wir die Sequenz

$${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_H)^*}\left(\mathcal{M}'/\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{M}'\right) \to {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}{}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_J)^*}\bar{\mathcal{M}}(D_\infty) \twoheadrightarrow \left(\mathcal{N}_\varepsilon / {}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to\tilde{C}_K)^*}\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon\right)$$

lokal auf ${}_{(\tilde{C}_{H_\varepsilon}\to H_\varepsilon)^{-1}}(V)$ durch

$$\mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i} \xrightarrow{\alpha''} \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i} \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha'') \tag{6.3.11}$$

beschreiben.
Mit der nachfolgenden Rechnung folgt $\operatorname{coker}(\alpha'') = \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{d_i}$. Damit ist jedes $\mathcal{N}_\varepsilon/\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon$ isomorph zu $\mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{d_i}$ und wir haben jeder Garbe aus $V'' \subseteq J_\varepsilon$ einen Quotienten $\mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{d_i}$ zugeordnet. Dies liefert einen Morphismus $\eta : V'' \to V$ mit $\alpha \circ \eta = \mathrm{id}_{V''}$.
Die Rückrichtung $\eta \circ \alpha = \mathrm{id}_V$ folgt aus der Berechnung des Kokerns.
Wir wissen, dass ${}_{pr_{2*}}\mathcal{N}_\varepsilon$ lokal frei von Rang d über H_ε ist. Damit ist ${}_{pr_{2*}}(\mathcal{N}_\varepsilon/\mathfrak{p}_i^{e_i}\mathcal{N}_\varepsilon)$ für jedes i lokal frei von Rang $\tilde{d}_i$ über H_ε und $\sum_i \tilde{d}_i = d$, wobei $\tilde{d}_i$ lokal konstante Funktionen auf H_ε sind. Seien $d_i := \tilde{d}_i(Q)$, dann ersetzen wir V durch $V \cap \left\{x \in H_\varepsilon \;\middle|\; \tilde{d}_i(x) = d_i\right\}$.
Wir bestimmen nun den Kokern der Abbildung

$$\alpha'' : \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i} \to \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{e_i},\ 1 \mapsto \sum_{n=0}^{e_i-1} b_n w_i^n.$$

Der Kokern $\operatorname{coker}(\alpha'') = \mathcal{O}_V[[w_i]]/\sum_n b_n w_i^n$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_V$-Modul von Rang d_i. Nach [D.E99, Prop 20.8] gilt $b_{d_i} \in \mathcal{O}_V^x$, sowie $b_n = 0$ für alle $n < d_i$. Damit ist $\operatorname{coker}(\alpha'') = \mathcal{O}_V[[w_i]]/w_i^{d_i}$. □

Wir haben in Satz 6.3.2 gezeigt, dass H_ε lokal isomorph zu J_ε ist und wir können oBdA V und V'' zu affinen Teilmengen $V = \operatorname{Spec}\Gamma_V \subseteq H_\varepsilon$ und $V'' = \operatorname{Spec}\Gamma_{V''} \subseteq J_\varepsilon$ verkleinern.

Wir können also folgende Diagramme betrachten.

$$\begin{tikzcd} X_\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & J_\varepsilon \arrow[d, "(\mathrm{id},\mathrm{Frob}_q)"] \\ H_\varepsilon \arrow[r, "(pr{,}m')"'] & J_\varepsilon \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{W} \arrow[r] \arrow[d] & V'' \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\mathrm{id},\mathrm{Frob}_q)"] & V'' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & V'' \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q} & V'' \times_{\operatorname{Spec} K} V'' \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $V'' \to V'' \times V''$ ist abgeschlossen und wird von der Abbildung $\operatorname{Spec} \Gamma_{V''} \to \operatorname{Spec}(\Gamma_{V''} \otimes_K \Gamma_{V''})$ induziert, die durch das Ideal $\ker\big(\Gamma_{V''} \otimes_K \Gamma_{V''} \to \Gamma_{V''},\, b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2^q\big) = \big((b \otimes 1)^q - (1 \otimes b) \mid b \in \Gamma_{V''}\big)$ gegeben ist. Da V und V'' isomorph sind folgt, dass

$$\mathcal{W} = \operatorname{Spec} \Gamma_{V''} / \big(pr^*(b)^q - m'^*(b) \mid b \in \Gamma_{V''}\big)$$

eine offene und affine Teilmenge von X_ε ist.

Lemma 6.3.3 Zu jedem $Q \in X_\varepsilon$ existiert ein offenes, affines Unterschema $\mathcal{W} \subseteq X_\varepsilon$, $Q \in \mathcal{W}$ mit $\mathcal{W} = \operatorname{Spec} \Gamma_{V''} / (1^*(b)^q - 2^*(b) : b \in \Gamma_{V''})$. □

Wir können nun zeigen, dass zu jedem Punkt aus X_ε eine affine Umgebung existiert, die endlich über K ist. Dazu benötigen wir die Definition von endlichen Morphismen.

Definition 6.3.4 (endlicher Morphismus von Schemata) [Har97, Def S.84]
Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt *endlicher Morphismus*, falls eine Überdeckung von Y durch offene, affine Teilmengen $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ existiert derart, dass für jedes i das Urbild $f^{-1}(V_i)$ affin und $f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec} B_i$ ist, für A_i-Algebren B_i, welche endlich erzeugte A_i-Moduln sind.

Lemma 6.3.5 Zu jedem Punkt $Q \in X_\varepsilon$ existiert eine offene, affine Umgebung $\mathcal{W}$, die endlich über K ist.

Beweis: Sei $\mathcal{W}$ das offene, affine Unterschema von X_ε aus Lemma 6.3.3 mit $Q \in \mathcal{W}$ und $B_\varepsilon := \Gamma_{V''} \;/\; \big(1^*(b)^q - 2^*(b) \mid b \in \Gamma_{V''}\big)$. Wir wollen zeigen, dass B_ε eine endlich-dimensionale K-Algebra ist.

Wir wissen, dass J von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ ist und nach Lemma 6.2.4 ist H von endlichem Typ über $J \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q} C \setminus \{\infty\}$. Diese Eigenschaft ist transitiv und bleibt vom Faserprodukt erhalten ([Har97, S.93 Ex 3.13]). Also ist $X_\varepsilon = (J \times_{J\times \mathrm{Pic}_{\tilde{C}/\mathbb{F}_q}} H) \times_{C\setminus\{\infty\}} \operatorname{Spec} K$ lokal von endlichem Typ über K. Die Voraussetzung für [Var02, Lemma 4.3] sind somit erfüllt und es folgt, dass $\mathcal{W}$ étale über K ist. Da $\mathcal{W}$ affin ist, erhalten wir mit [Mil80, Prop I.3.2] unser gewünschtes Ergebnis und zwar, dass $\mathcal{W} = \operatorname{Spec} B_\varepsilon$ endlich über K ist. $\square$

Satz 6.3.6 Sei $\underline{M}$ ein Anderson A-Motiv über $L = L^{alg}$ mit komplexer Multiplikation durch kommutatives, halbeinfaches E und es gelte $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \subseteq \mathrm{End}_L(\underline{M})$. Dann ist $\underline{M}$ schon über einer endlichen Körpererweiterung K_0 von $\kappa(\varepsilon)$ definiert, das heißt $(M, \tau) \cong (M_0, \tau_0) \otimes_{K_0} L^{alg}$ für ein Anderson A-Motiv $\underline{M}_0$ über K_0.

Beweis: Nach Korollar 6.2.7 existiert zu $\underline{M}$ eine assoziierte Garbe $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}) \in \mathcal{X}(L)$, das heißt, es existiert eine Abbildung $f : \operatorname{Spec} L \to X$. Da $\gamma : A \to L$ durch A/ε faktorisiert und wir die Einbettung $A/\varepsilon \hookrightarrow \kappa(\varepsilon) \hookrightarrow K$ betrachten können, erhalten wir die Injektion der algebraisch abgeschlossenen Körper $\bar{\gamma} : K \hookrightarrow L$.
Die Abbildung $\rho : A \to A/\varepsilon$ induziert die Abbildung $\operatorname{Spec}\rho : \operatorname{Spec} K \to C \setminus \{\infty\}$ und da X ein Schema über C ist, existiert eine Abbildung $c : X \to C \setminus \{\infty\}$.
Wir können folgendes Diagramm betrachten.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} L \arrow[dr, dashed, "\exists! \bar{f}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\operatorname{Spec}\bar{\gamma}"'] & & \\
& X_\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "c"] \\
& \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\operatorname{Spec}\rho"'] & C \setminus \{\infty\}
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten somit die Abbildung $\bar{f} : \operatorname{Spec} L \to X_\varepsilon$ mit $\bar{f}(\operatorname{Spec} L) = Q \in X_\varepsilon$.
Nun wollen wir zeigen, dass diese Abbildung durch $\operatorname{Spec} K$ faktorisiert. Nach Lemma 6.3.3 existiet eine offene, affine Umgebung $\mathcal{W}$ mit $Q \in \mathcal{W} \subseteq X_\varepsilon$, die nach Lemma 6.3.5 endlich über K ist, das heißt $\mathcal{W} = \operatorname{Spec} B_\varepsilon$ für eine endlich dimensionale K-Algebra B_ε.
Sei $\mathfrak{p} \subset B_\varepsilon$ das zu Q gehörende Primideal, also liegt Q in $X_\varepsilon(B_\varepsilon/\mathfrak{p})$.
Betrachten wir nun den Integritätsbereich $B_\varepsilon/\mathfrak{p}$, so ist nach [D.E99, Cor 4.17] $B_\varepsilon/\mathfrak{p}$ eine endliche Körpererweiterung von K, also gilt $B_\varepsilon/\mathfrak{p} = K$ und Q liegt in $X_\varepsilon(K)$.
Nun existiert ein Anderson A-Motiv $\underline{M}_0$ über K mit $\underline{M} \cong \underline{M}_0 \otimes_K L$. Nach Satz 2.4.1 wissen wir, dass $\underline{M}$ schon über einem endlich erzeugten Unterkörper K_0 von K definiert ist.

Damit gilt, da K_0 endlich erzeugt und algebraisch ist, dass K_0 eine endliche Körpererweiterung von $\kappa(\varepsilon)$ ist. Somit ist $\underline{M}$ über einer endlichen Körpererweiterung von $\kappa(\varepsilon)$ definiert. □

Literaturverzeichnis

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean Analysis*. Springer-Verlag, 1984.

[BH07] G. Böckle and U. Hartl. Uniformizable families of t-motives. *American Mathematical Society*, 359, no.8:3933–3972, 2007.

[BH08] M. Bornhofen and U. Hartl. Pure anderson motives and abelian τ-sheaves. *preprint on arXiv:0709.2809v1 [math.NT], version vom 18 Sep 2007*, feb 2008.

[BH09] M. Bornhofen and U. Hartl. Pure anderson motives over finite fields. *Journal of Number Theory 129*, 2:247–283, 2009.

[BL85] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Stable reduction and uniformization of abelian varieties. *Math. Ann.*, 270:349–379, 1985.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynauld. *Néron Models*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

[Bos03] S. Bosch. Lineare algebra 3. Vorlesung WWU Münster, WS 02/03.

[Bos08] S. Bosch. Lectures on formal and rigid geometry. Vorlesung WWU Münster, April 2008.

[Bou58] N. Bourbaki. *Algèbre, chp 8*. Hermann-Verlag, 1958.

[Bou72] N. Bourbaki. *Commutative Algebra*. Hermann-Verlag, 1972.

[D.E99] D.Eisenbud. *Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 1999.

[Deu41] M. Deuring. Die typen der multiplikationsringe elliptischer funktionenkörper. *Abhandl. Math. Sem. Hansischen Univ.*, 14:197–272, 1941.

[Dri76] V. G. Drinfeld. Elliptic modules. *Math. USSR-Sb*, 23:561–592, 1976.

[Dri77] V. G. Drinfeld. Commutative subrings of certain noncommutative rings. *Funct. Anal. Appl.*, 11(1):9–12, 1977.

[Gar03] F. Gardeyn. Analytic morphisms of t-motives. *Mathematische Annalen (c) Springer-Verlag*, 2003.

[Gos98] D. Goss. *Basic structures of function field arithmatic*. Springer-Verlag, zweite edition, 1998.

[Gro62] A. Grothendieck. *Fondements de la géométrie algébrique, Seminaire Bourbaki 1957 - 62,* volume n°221. Secretariat Mathematique, Paris, 1962.

[Har97] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1997.

[Har08] Urs Hartl. Arithmetic of function fields. Vorlesung SS 08 WWU Münster, SS 08.

[Mil80] J. S. Milne. *Étale cohomology*. Princeton University Press, 1980.

[Mil07] J. S. Milne. The fundamental theorem of complex multiplication. *preprint on arXiv:0705.3446v1 [math.NT], version 23 May 2007*, 2007.

[ML71] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.

[Oor73] F. Oort. The isogeny class of a cm-type abelian variety is defined over a finite extension of the prime field. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 3:399–408, 1973.

[Rei03] I. Reiner. *Maximal orders*. Oxford University Press Inc, New York, 2003.

[ST61] G. Shimura and Y. Taniyama. Complex multiplication of abelian varieties. *Publ. Math. Soc. Japan*, 6, 1961.

[Tam94] A. Tamagawa. Generalization of anderson's t-motives and tate conjecture. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, 884:154–159, Kyoto (1994). in: Moduli Spaces, Galois Representations and L-Functions.

[Tat66] J. Tate. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. *Invent. Math.*, 2:134–144, 1966.

[TW96] Y. Taguchi and D. Wan. l-functions of φ-sheaves and drinfeld modules. *Journal of American Mathematical Society*, 9(3):755–781, 1996.

[Var02] Y. Varshavsky. Moduli spaces of principal f-bundles. *ArXiv Mathematics e-prints*, may 2002.

[Yu04] Chia-Fu Yu. The isomorphism classes of abelian varieties of cm-type. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 187:305–319, 2004.

Erklärung der Eigenständigkeit

Hiermit versichere ich, Anne Schindler, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort, Datum und Unterschrift