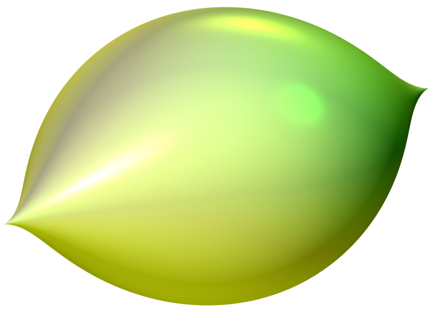
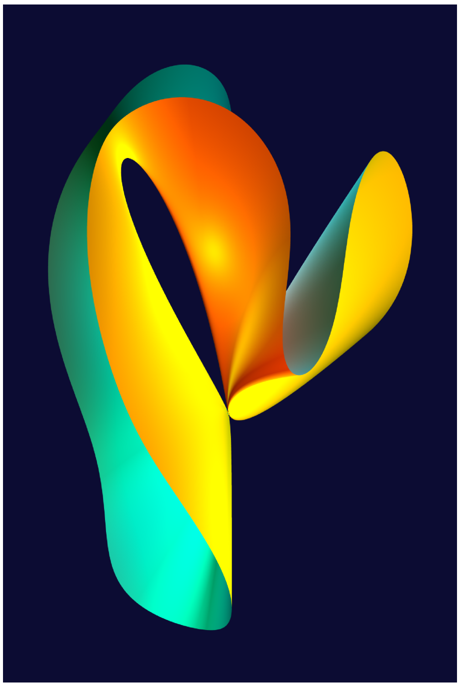
Algebra, Zahlentheorie, Algebraische Geometrie

In der *Algebra* beschäftigt man sich mit dem Lösen von Polynomgleichungen, wie zum Beispiel $X^2 - 2 = 0$, oder $X^5 - 4X + 2 = 0$. Während man die Lösungen $X = \pm\sqrt{2}$ der ersten Gleichung durch Wurzelziehen erhält, ist dies für die zweite Gleichung unmöglich. Dies folgt aus genialen Ideen von E. Galois, der 1832 mit 21 Jahren bei einem Duell getötet wurde. Galois' Theorie ist Gegenstand der Vorlesung „Algebra“, die man üblicherweise im 3. oder 5. Semester hört. Dort erfährt man auch, warum die Quadratur des Kreises und die Winkeldrittelung mit Zirkel und Lineal unmöglich sind.



(a) $X^2 + Z^2 + Y^3(Y-1)^3 = 0$



(b) $(X^2 - Y^3)^2 - (X + Y^2)Z^3 = 0$

Abbildung 1: reelle Lösungsmengen

Wir betrachten nun alle Polynomgleichungen $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X^1 + a_0 = 0$, wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen sind. Mit $\overline{\mathbb{Q}}$ bezeichnen wir die Menge aller Zahlen, welche Lösungen einer dieser Gleichungen sind. Dann bildet $\overline{\mathbb{Q}}$ einen *Körper*, das heißt Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Zahlen aus $\overline{\mathbb{Q}}$ liegen wieder in $\overline{\mathbb{Q}}$ (z.B. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist Lösung der Gleichung $X^4 - 10X^2 + 1 = (X^2 - 5)^2 - 24 = 0$). Eines der zentralen Probleme der aktuellen Forschung in der Algebra und der *Zahlentheorie* ist, den Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ genauer zu verstehen. Wir kommen später noch darauf zurück.

Nachdem wir oben Lösungen von Polynomgleichungen in einer Variablen X untersucht haben, liegt es nahe, auch Lösungsmengen von Polynomgleichungen (oder von Polynomgleichungssystemen) in mehreren Variablen zu studieren, etwa $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, oder $Y^2 - X^3 - 17 = 0$. Wie man an den Bildern sieht, haben diese Lösungsmengen eine geometrische Struktur: z.B. ist die Kreislinie die reelle Lösungsmenge von $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Sie haben auch eine reiche algebraische Struktur, die davon herrührt, dass wir Polynomgleichungen betrachten. Der Zweig der Mathematik, der diese Lösungsmengen untersucht, heißt *algebraische Geometrie*. Auch einzelne Aspekte der Topologie und der Analysis spielen hier eine wichtige Rolle. Die algebraische Geometrie und die Zahlentheorie genießen schon seit langem große Aufmerksamkeit in der internationalen mathematischen Forschung.

Eine besonders interessante Sammlung solcher Lösungsmengen erhält man für Gleichungen der Form $Y^2 - X^3 - aX - b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Denn die Punkte in solch einer Lösungsmenge lassen sich

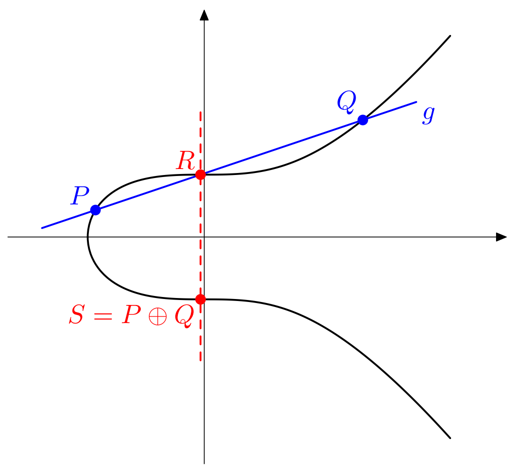


Abbildung 2: Additionsgesetz der Kurve $Y^2 - X^3 - 17 = 0$

gemäß folgender Regel „addieren“. Sind P, Q zwei Punkte in der Lösungsmenge, so betrachtet man die Gerade g durch P und Q, wie in Abbildung 2. (Falls $P = Q$, so nimmt man für g die Tangente in P an die Lösungsmenge.) Die Gerade g schneidet die Lösungsmenge in einem weiteren Punkt R (der gleich P oder Q sein kann, wenn g die Tangente in P oder Q ist). Spiegelt man R an der X-Achse, so erhält man den Punkt S, der auch zur Lösungsmenge gehört. Die „Additionsregel“ besagt nun, dass die „Summe“ von P und Q der Punkt S sein soll. Wir schreiben $P \oplus Q = S$. Offensichtlich gilt $P \oplus Q = Q \oplus P$. Außerdem gilt $(P \oplus Q) \oplus T = P \oplus (Q \oplus T)$, falls T ein weiterer Punkt der Lösungsmenge ist, doch das ist nicht so offensichtlich. Haben P und Q ihre Koordinaten in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, so auch $P \oplus Q$. Auf diese Weise sieht man, dass etwa die Gleichung $Y^2 - X^3 - 17 = 0$ unendlich viele Lösungen mit rationalen Koeffizienten besitzt (z.B. die Punkte $(-2, 3)\,, (2, 5)\,, (\frac{137}{64}, -\frac{2651}{512})\,, \ldots$). Über den Grad dieser Unendlichkeit gibt es eine berühmte Vermutung von B. Birch und P. Swinnerton-Dyer, auf deren Klärung 1 Million US-Dollar ausgesetzt ist.

Eine andere, 350 Jahre alte Vermutung des Zahlentheoretikers P. de Fermat besagt, dass die Gleichung $X^n + Y^n - Z^n = 0$ keine Lösungen in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit $X \cdot Y \cdot Z \neq 0$ besitzt, falls n eine ganze Zahl größer als 2 ist. Diese Vermutung konnte vor einigen Jahren auf spektakuläre Weise mithilfe der algebraischen Geometrie bewiesen werden. Die algebraische Geometrie leistet auch auf vielfache Weise wertvolle Beiträge zum Verständnis des Körpers $\overline{\mathbb{Q}}$ durch Betrachten von Polynomgleichungssystemen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

Eine weitere aktuelle Frage der Zahlentheorie, deren Beantwortung ebenfalls 1 Million US Dollar einbringt, ist die Riemannsche Vermutung, die sich mit Primzahlen beschäftigt. Man weiß, dass für jede reelle Zahl N, die Anzahl der Primzahlen, die $\leq N$ sind, ungefähr $\int_2^N \frac{dt}{\ln t}$ ist. Die Frage ist nun, für diesen gut berechenbaren Näherungswert die optimale Fehlerabschätzung anzugeben und zu beweisen. Hierbei spielen sogenannte Zeta- und L-Funktionen eine große Rolle, die auch bei der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer und in anderen Gebieten der Zahlentheorie wichtig sind.

An der Universität Münster bilden die Zahlentheorie und die algebraische Geometrie einen bedeutenden Schwerpunkt mit langer Tradition. Gegenwärtig arbeiten vier Professoren mit etwa fünfzehn Mitarbeitern in diesem Bereich, der damit hier drei- bis viermal größer ist als an den meisten deutschen Universitäten. Auch in den Studiengängen für Bachelor, Master und höheres Lehramt spielt dieser Schwerpunkt daher eine wichtige Rolle.

Abbildung 1a:	„Zitrus“ von ©Herwig Hauser, Quelle http://www.imaginary2008.de/
Abbildung 1b:	„Seepferdchen“ von ©Herwig Hauser, Quelle Herwig Hauser
Abbildung 2:	eigene Graphik